

ISSN 1026-2237

DOI 10.18522/1026-2237

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Северо-Кавказский
регион*

ЕСТЕСТВЕННЫЕ

НАУКИ

2024

4-1

Журнал основан в 1972 г. Ю.А. Ждановым

Главная редакция:

М.А. Боровская (главный редактор),
В.Е. Закруткин (заместитель главного редактора),
Е.А. Шинкаренко (ответственный секретарь)

Редакционная коллегия:

М.А. Боровская – главный редактор, академик РАО, доктор эконом. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.Е. Закруткин – председатель редколлегии, доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Я.М. Ерусалимский – зам. председателя редколлегии, кандидат физ.-мат. наук, доктор техн. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.А. Бабешко – академик РАН, доктор физ.-мат. наук, профессор, Кубанский государственный университет, Россия
Б.С. Карамурзов – доктор техн. наук, профессор, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова, Россия
В.И. Колесников – академик РАН, доктор техн. наук, профессор, Ростовский государственный университет путей сообщения, Россия
А.Г. Кусраев – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный математический институт ВЦ РАН, Россия
Г.Г. Матишов – академик РАН, доктор геол.-мин. наук, профессор, Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, Россия
В.И. Минкин – академик РАН, доктор хим. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
М.Х. Рабаданов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Дагестанский государственный университет, Россия
А.В. Абанин – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Г.Г. Бабаян – доктор техн. наук, Центр эколого-ноосферных исследований НАН РА, Армения
О.С. Безуглова – доктор биол. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Н.И. Бойко – доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.В. Бочкарев – доктор геол.-мин. наук, профессор, Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, Россия
Л.С. Ворович – кандидат физ.-мат. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
О.Н. Демина – доктор биол. наук, профессор, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Россия
А.Г. Захаров – доктор техн. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Л.М. Зубов – доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
М.Ю. Жуков – доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.Н. Карапетянц – доктор физико-математических наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Д.В. Карелин – доктор биол. наук, Институт географии РАН, Россия
М.И. Карякин – доктор физ.-мат. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
С.И. Колесников – кандидат геогр. наук, доктор с.-х. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
Е.М. Колосова – кандидат физ.-мат. наук, Южный федеральный университет, Россия
Г.В. Куповых – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
С.В. Курбатов – доктор хим. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.М. Лерер – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
С.Н. Мелихов – доктор физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.А. Миноранский – доктор с.-х. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
В.В. Онищенко – доктор геогр. наук, профессор, Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Россия
О.В. Назаренко – кандидат геогр. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
С.Г. Парада – доктор геол.-мин. наук, доцент, Федеральный исследовательский центр Южный научный центр РАН, Россия
Г.В. Пироговская – доктор с.-х. наук, профессор, Институт почвоведения и агрохимии НАН РБ, Белоруссия
В.С. Рабинович – доктор физ.-мат. наук, профессор, Национальный политехнический институт, Мексика
М.А. Сазыкина – доктор биол. наук, доцент, Южный федеральный университет, Россия
В.И. Силаев – доктор геол.-мин. наук, Институт геологии им. Н.П. Юшкина Коми НЦ УрО РАН, Россия
В.Н. Труфанов – доктор геол.-мин. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
П. Фатгаль – доктор наук, профессор, Университет Нанта, Франция
Ю.А. Федоров – доктор геогр. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия
А.Д. Хованский – кандидат геол.-мин. наук, доктор геогр. наук, профессор, Южный федеральный университет, Россия

Учредители:

Дагестанский государственный технический университет,
Дагестанский государственный университет,
Донской государственный технический университет,
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова,
Кубанский государственный технологический университет,
Ростовский государственный университет путей сообщения,
Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова,
Южный федеральный университет

Journal was founded in 1972 by Yu.A. Zhdanov

Main Edition:

M.A. Borovskaya (Editor-in-Chief),
V.E. Zakrutkin (Deputy Editor-in-Chief),
E.A. Shinkarenko (Assistant Editor)

Editorial Board:

M.A. Borovskaya - Editor-in-Chief, Academician, Russian Academy of Education, Doctor of Economics, Professor, Southern Federal University, Russia
V.E. Zakrutkin - Chairman of the Editorial Board, Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia
Ya.M. Erusalimsky - Deputy Chairman of the Editorial Board, Candidate of Physics and Mathematics, Doctor of Technical Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia
V.A. Babeshko - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Kuban State University, Russia
B.S. Karamurзов - Doctor of Technical Sciences, Professor, Berbekov Kabardino-Balkarian State University, Russia
V.I. Kolesnikov - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Technical Sciences, Professor, Rostov State Transport University, Russia
A.G. Kusraev - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Mathematical Institute, Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia
G.G. Matishov - Academician, Sciences, Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Federal Research Center the Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia
V.I. Minkin - Academician, Russian Academy of Sciences, Doctor of Chemistry, Professor, Southern Federal University, Russia
M.H. Rabadanov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Dagestan State University, Russia
A.V. Abanin - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
G.G. Babayan - Doctor of Technical Sciences, Center for Ecological and Noospheric Studies, National Academy of Sciences of Armenia, Armenia
O.S. Bezuglova - Doctor of Biology, Professor, Southern Federal University, Russia
N.I. Boiko - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia
A.V. Bochkarev - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Gubkin Russian State University of Oil and Gas, Russia
L.S. Vorovich - Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, Russia
O.N. Dyomina - Doctor of Biological Sciences, Professor, Aliev Karachay-Cherkess State University, Russia
M.Y. Zhukov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
A.G. Zakharov - Doctor of Technical Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia
L.M. Zubov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
A.N. Karapetyants - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
Dmitry V. Karelin - Doctor of Biology, Institute of Geography of the Russian Academy of Sciences
M.I. Karjakin - Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, Southern Federal University, Russia
S.I. Kolesnikov - Candidate of Geography, Doctor of Agricultural Science, Professor, Southern Federal University, Russia
E.M. Kolosova - Candidate of Physics and Mathematics, Southern Federal University, Russia
G.V. Kupovykh - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
S.V. Kurbatov - Doctor of Chemistry, Professor, Southern Federal University, Russia
A.M. Lerer - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
S.N. Melikhov - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Southern Federal University, Russia
V.A. Minoranskiy - Doctor of Agricultural Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia
V.V. Onishchenko - Doctor of Geography, Professor, Aliev Karachay-Cherkess State University, Russia
O.V. Nazarenko - Candidate of Geography, Associate Professor, Southern Federal University, Russia
S.G. Parada - Doctor of Geology and Mineralogy, Associate Professor, Federal Research Center the Southern Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Russia
G.V. Pirogovskaya - Doctor of Agricultural Sciences, Professor, Institute of Soil Science and Agrochemistry, National Academy of Sciences of Belarus, Belarus
V.S. Rabinovich - Doctor of Physics and Mathematics, Professor, National Polytechnic Institute, Mexico
M.A. Sazykina - Doctor of Biological Sciences, Professor, Southern Federal University, Russia
Valerii I. Silaev - Doctor of Geology and Mineralogy, Komi Science Centre of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Russia
V.N. Trufanov - Doctor of Geology and Mineralogy, Professor, Southern Federal University, Russia
P. Fattal - PhD, Professor, University of Nantes, France
Yu.A. Fedorov - Doctor of Geography, Professor, Southern Federal University, Russia
A.D. Khovanskiy - Candidate of Geology and Mineralogy, Doctor of Geography, Professor, Southern Federal University, Russia

The Founders

Dagestan State Technical University,
Dagestan State University,
Don State Technical University,
Berebekov Kabardino-Balkarian State University,
Kuban State Technological University,
Rostov State Transport University,
Rostov State University of Economics,
Platov South Russian State Polytechnical University,
Southern Federal University

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ. СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН

BULLETIN OF HIGHER EDUCATIONAL INSTITUTIONS. NORTH CAUCASUS REGION

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77 – 77252 от 25.11.2019,
выдано Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий
и массовых коммуникаций
Научный журнал
Издается с 1973 г.
Периодичность серии 4 номера в год
№ 4-1 (224-1) 2024 г.

Registration certificate
PI No. FS 77 - 77252 dated 25.11.2019
issued Federal Service for Supervision
of Communications, Information Technology,
and Mass Media
Science magazine
Published since 1973.
4 issues per a year
No. 4-1 (224-1) 2024

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

NATURAL SCIENCE

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Бабаев А.Б. Об эквивалентных нормах анизотропных пространств Гёльдера – Зигмунда переменной гладкости 5	Babaev A.B. On Equivalent Norms of Anisotropic Holder-Zygmund Spaces of Variable Smoothness..... 5
Ватульян А.О., Юров В.О. Об анализе дисперсионного множества для неоднородного ортотропного упругого волновода 13	Vatulyan A.O., Yurov V.O. On Dispersion Set Analysis for an Inhomogeneous Orthotropic Elastic Waveguide 13
Кораблина Ю.В. Непрерывность линейных операторов в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазибанаховых пространств голоморфных функций 24	Korablina Yu.V. Continuity of Linear Operators in Projective and Inductive Limits of Sequences of Quasi-Banach Spaces of Holomorphic Function 24
Кудрявцев О.Е., Данилова Н.В. Вычисление цен опционов в модели Хестона с помощью искусственных нейронных сетей 31	Kudryavtsev O.E., Danilova N.V. Pricing Options in the Heston Model Using Artificial Neural Networks 31
Куракин Л.Г., Мелехов А.П., Островская И.В. Диаграммы устойчивости правильной системы вихревых зарядов вне круговой области в случае произвольной циркуляции 38	Kurakin L.G., Melekhov A.P., Ostrovskaya I.V. Stability Diagrams of a Regular System of Vortex Charges Outside the Circular Region in the Case of Arbitrary Circulation..... 38
Ревина С.В., Келеметова К.А. Линейный анализ неустойчивости Тьюринга в системах химической кинетики 49	Revina S.V., Kelemetova K.A. Linear Analysis of Turing Instability in Systems of Chemical Kinetics 49
Самсонов И.К., Сумбатян М.А. Аэродинамическое качество тонкого крыла с винглетами различной высоты ... 60	Samsonov I.K., Sumbatyan M.A. Aerodynamic Quality of Thin Wing with Winglets of Various Heights 60
Хубезхты Ш.С. Приближенное решение гиперсингулярного интегрального уравнения с применением рядов Чебышева на классе функций, ограниченных на одном конце и неограниченных на другом конце интервала интегрирования 69	Khubezhty Sh.S. An Approximate Solution of a Hypersingular Integral Equation Using Chebyshev Series on a Class of Function Bounded at One End and Unbounded at the Other End of the Integration Interval 69

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Васильченко Н.Г., Механцева К.В., Иванов Ф.Д., Пуликова Е.П., Чистяков В.А., Усатов Ал.В., Брень А.Б., Рудой Д.В. Биотехнологически перспективные гидролитические свойства бактерий родов <i>Bacillus</i> и <i>Paenibacillus</i> , выделенных из ризосферы пшеницы озимой (<i>Triticum aestivum</i> L.). Часть 1.....	77
Евстегнеева Н.А., Колесников С.И., Тимошенко А.Н., Русева А.С., Минникова Т.В. Диагностика экотоксичности лития в почвах разной буферности по активности инвертазы	90
Жарикова Е.А., Голодная О.М. Оценка запасов углерода в почвах лесов юга Приморья	97
Иванов А.Л., Узденов У.Б., Борлакова Ф.М. Неогеновые реликты флоры Карачаево-Черкессии и их значение для понимания флорогенетических процессов на Северном Кавказе.....	106
Исламмагомедова Э.А., Халилова Э.А., Абакарова А.А., Аливердиева Д.А. Толерантность дрожжей <i>S. cerevisiae</i> к повышенным концентрациям глюкозы и этанола	116
Кузьмина Н.М. Роль и особенности произрастания декоративных древесных растений в городских зонах рекреации	125

ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ

Бауэр С.М., Боев Н.В., Ватульян А.О., Карякин М.И. Юрий Анатольевич Устинов (1934–2023).....	134
Жуков М.Ю. К 90-летию со дня рождения В.И. Юдовича. Эпизоды о научной деятельности.....	137

Указатель материалов, опубликованных в журнале «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» в 2024 г.....	142
--	-----

BIOLOGICAL SCIENCES

Vasilchenko N.G., Mekhantseva K.V., Ivanov F.D., Pulikova E.P., Chistyakov V.A., Usatov A.V., Bren A.B., Rudoy D.V. Biotechnologically Prospective Properties of Bacteria of the Genera <i>Bacillus</i> and <i>Paenibacillus</i> Isolated from the Rhizosphere of Winter Wheat (<i>Triticum Aestivum</i> L.). Part. 1.	77
Evstegneeva N.A., Kolesnikov S.I., Timoshenko A.N., Ruseva A.S., Minnikova T.V. Diagnostics of Lithium Ecotoxicity in Soils of Different Buffering Capacity by Invertase Activity	90
Zharikova E.A., Golodnaya O.M. Assessment of Carbon Stocks in Soils Forests of the South of Primorye	97
Ivanov A.L., Uzdenov U.B., Borlakova F.M. Neogene Relics of the Flora of Karachay-Cherkessia and Their Significance for Understanding Florogenetic Processes in the North Caucasus	106
Islammagomedova E.A., Khalilova E.A., Abakarova A.A., Aliverdieva D.A. Tolerance of <i>S. cerevisiae</i> yeast to elevated concentrations of glucose and ethanol	116
Kuzmina N.M. Role and Features of Growing Ornamental Woody Plants in Urban Recreational Areas	125

TOUCHES TO THE PORTRAIT

Bauer S.M., Boev N.V., Vatulyan A.O., Karyakin M.I. Yuri Anatolyevich Ustinov (1934-2023)	134
Zhukov M.Yu. To the 90th Anniversary of the Birth of V.I. Yudovich. Episodes About Scientific Activities.....	137

Index of Articles Published in the Journal “Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science” in 2024.....	142
---	-----



Редколлегия и коллектив редакции сердечно поздравляют Главного редактора нашего журнала Марину Александровну Боровскую с присвоением звания академика Российской академии образования и желают ей дальнейших творческих успехов в научной и общественной деятельности, новых достижений на благо отечественной науки и образования, реализации намеченных планов, а также крепкого здоровья и семейного благополучия.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Научная статья
УДК 517.98
doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-5-12

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ НОРМАХ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ГЁЛЬДЕРА – ЗИГМУНДА ПЕРЕМЕННОЙ ГЛАДКОСТИ

Аливерд Бахтиярович Бабаев
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
albabaev@sfedu.ru

Аннотация. Введены и изучены анизотропные пространства Гёльдера – Зигмунда (в общем случае – распределение), определенные на \mathbb{R}^n , с переменным показателем гладкости, который может принимать и отрицательные значения. Для определения этих пространств использовалось разбиение единицы Литтлвуда – Пэли, модифицированное для анизотропного случая, с помощью которого была введена норма в анизотропном пространстве по аналогии с изотропным. В случае, когда замыкание области значений показателя гладкости содержит лишь положительные значения, построено семейство норм в анизотропном пространстве Гёльдера – Зигмунда переменной гладкости с помощью различных степеней оператора конечной разности. Доказана эквивалентность семейства норм, заданных с помощью конечных разностей с нормой, определенной с использованием разбиения единицы Литтлвуда – Пэли на введенных анизотропных пространствах.

Ключевые слова: пространство Гёльдера – Зигмунда, анизотропность, переменный показатель гладкости, эквивалентные нормы

Для цитирования: Бабаев А.Б. Об эквивалентных нормах анизотропных пространств Гёльдера – Зигмунда переменной гладкости // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 5–12.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

ON EQUIVALENT NORMS OF ANISOTROPIC HOLDER-ZYGMUND SPACES OF VARIABLE SMOOTHNESS

Aliverd B. Babaev
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
albabaev@sfedu.ru

Abstract. Anisotropic Holder-Zygmund spaces (in the general case, a distribution) defined on \mathbb{R}^n with a variable smoothness index, which can also take negative values, are introduced and studied. To define these spaces, a partition of the Littlewood-Paley unit modified for the anisotropic case was used, with the help of which a norm

© Бабаев А.Б., 2024

was introduced in an anisotropic space by analogy with an isotropic one. In the case when the closure of the domain of values of the smoothness index contains only positive values, a family of norms in an anisotropic Holder-Zygmund space with a variable smoothness index was constructed using various powers of the finite difference operator. The equivalence of the family of norms defined using finite differences with the norm defined using the partition of the Littlewood-Paley unit on the introduced anisotropic spaces is proved.

Keywords: Holder-Zygmund space, anisotropy, variable smoothness index, equivalent norms

For citation: Babaev A.B. On Equivalent Norms of Anisotropic Holder-Zygmund Spaces of Variable Smoothness. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):5-12. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Исследованию анизотропных функциональных пространств, как и пространств функций с переменными показателями, посвящено немало работ. Фундаментальные результаты по анизотропным пространствам и обзор литературы со ссылками на источники можно найти в [1–5]. Такие пространства важны во многих приложениях, например, при исследовании параболических уравнений [6, 7]. В данной работе устанавливается эквивалентность норм в анизотропных пространствах Гёльдера – Зигмунда с переменным показателем гладкости. Для изотропного случая с постоянным показателем гладкости аналогичные результаты можно найти в [8, с. 34], для переменного – в [9–11]. Применение пространств Гёльдера с переменным показателем гладкости, который не принимает целых значений, для анализа локальной гладкости решений эллиптических краевых задач можно посмотреть в [12].

Обозначения и определения

Для любых элементов $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ вещественного n -мерного линейного пространства \mathbb{R}^n скалярное произведение и норма определены, соответственно, равенствами $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n$ и $|x| = \sqrt{(x, x)}$. Для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ (здесь всюду $\mathbb{Z}_+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$) обозначим его порядок как $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, а также x^α означает $x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n}$. Производная $|\alpha|$ -го порядка ∂_x^α имеет обычное значение.

На \mathbb{R}^n введем анизотропное расстояние, которое будет определяться вектором анизотропности $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_n) \in (0, \infty)^n$. А именно для $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ его анизотропную длину $|x|_\kappa$ определим следующим образом:
$$|x|_\kappa = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ t & \text{при } x_1^2 t^{-2\kappa_1} + \dots + x_n^2 t^{-2\kappa_n} = 1. \end{cases}$$

Потребуем, чтобы вектор анизотропности удовлетворял равенству $\kappa_1 + \dots + \kappa_n = n$, так что изотропному случаю отвечает вектор $\kappa = (1, \dots, 1)$. Отметим лишь, что в изотропном случае $|x|_\kappa$ есть евклидова норма $|x|$ вектора x . В дальнейшем понадобятся положительные константы $\kappa_- = \min(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ и $\kappa_+ = \max(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$.

«Анизотропное умножение» скаляра $t \in (0, \infty)$ на вектор $x \in \mathbb{R}^n$ осуществляется по формуле $t^\kappa x = (t^{\kappa_1} x_1, \dots, t^{\kappa_n} x_n)$, а для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ – по определению $t^{\alpha \kappa} x = (t^\alpha)^{\kappa} x$. Тогда имеет место равенство $|t^\kappa x|_\kappa = t |x|_\kappa$.

Далее будут встречаться хорошо известные пространства определенных на \mathbb{R}^n функций: $\mathcal{C}^N(\mathbb{R}^n)$, $N \leq \infty$; $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ – пространство всех N раз непрерывно дифференцируемых функций, пространство Шварца и пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными в \mathbb{R}^n носителями соответственно. Двойственное к $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ пространство умеренных распределений будем обозначать как $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Преобразование Фурье функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ задается формулой $\hat{f}(\xi) = \int f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x} dx$ и продолжается по двойственности на пространство умеренных распределений $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Здесь и в дальнейшем область интегрирования не указывается, если она совпадает с \mathbb{R}^n . Норма элемента u в пространстве $L^p(\mathbb{R}^n)$ будет, как обычно, обозначаться как $\|u\|_{L^p}$, $1 \leq p \leq \infty$.

Средний (в определенном далее смысле) показатель гладкости исследуемой функции в точке $x \in \mathbb{R}^n$ будет задавать значение функции $s(x)$ в этой точке. Потребуем, чтобы функция $s(x)$ была вещественнозначной, ограниченной и непрерывной, а также чтобы для нее существовала постоянная $C_s > 0$, такая, что для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|y|_x < 1$, выполнялось неравенство

$$|\log_2 |y|_x| \cdot |s(x+y) - s(x)| \leq C_s. \quad (1)$$

Условие (1) эквивалентно следующему [9]:

$$S^{-1} |y|_x^{s(x)} \leq |y|_x^{s(x+y)} \leq S |y|_x^{s(x)}, \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \quad 0 < |y|_x < 1, \quad (2)$$

где $S = 2^{C_s}$. Обозначим $s_- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} s(x)$, $s_+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} s(x)$, $s_\Delta = s_+ - s_-$. Показатель гладкости по переменной x_j задается формулой $s_j(x) = s(x)/\kappa_j$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Если $s(x) \neq 0$, то $n = s(x) \sum_{j=1}^n 1/s_j(x)$.

Оператор взятия конечной разности δ_h действует на функцию u по правилу $\delta_h u(x) = u(x+h) - u(x)$, $x, h \in \mathbb{R}^n$, а его целые положительные степени определены по формуле $\delta_h^k = \delta_h \delta_h^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Стандартный базис $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ векторного пространства \mathbb{R}^n предоставляет удобную форму записи конечной разности по j -й переменной $\delta_{te_j} u(x) = u(x_1, \dots, x_j + t, \dots, x_n) - u(x)$. Буквой C будем обозначать различные положительные константы.

Анизотропное пространство Гельдера – Зигмунда $C_x^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ при $s_- > 0$

Определение 1. Анизотропное пространство $C_x^{s(\cdot)} = C_x^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным средним показателем гладкости $s(\cdot)$ при $s_- > 0$ и вектором анизотропности κ состоит из непрерывных и ограниченных на \mathbb{R}^n функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C_x^{s(\cdot)}} = \|f\|_{L^\infty} + \sup_{h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_h^N f(x)|}{|h|_x^{s(x)}}, \quad (3)$$

где $N = [s_+/\kappa_-] + 1$ (здесь и далее скобки $[t]$ означают целую часть числа t). Очевидно, что если в этом определении супремум по всем $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ заменить на супремум по всем $0 < |h|_x < 1$, то получим эквивалентную норму. Если обозначить через $\|f\|_{C_x^{s(\cdot)}}^{(N)}$ правую часть в (3) при $N > [s_+/\kappa_-] + 1$, то соотношение (2) позволяет заключить, что для любого такого N существует $C > 0$, такое, что для всех f верно неравенство $\|f\|_{C_x^{s(\cdot)}}^{(N)} \leq C \|f\|_{C_x^{s(\cdot)}}$.

В качестве примера можно привести популярное параболическое пространство Гельдера $C^{1+\alpha/2, 2+\alpha}(\mathbb{R}^n)$ функций, показатель гладкости которых по первой переменной $1 + \alpha/2$, а по остальным переменным $2 + \alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha = \text{const}$. В этом случае элементы вектора анизотропности принимают значения $\kappa_1 = \frac{2n}{n+1}$, $\kappa_2 = \dots = \kappa_n = \frac{n}{n+1}$, а средняя гладкость $s = \frac{(2+\alpha)n}{n+1}$.

На анизотропном пространстве $C_x^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ можно ввести ещё одну норму

$$\|f\|'_{C_x^{s(\cdot)}} = \|f\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^n \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_{te_j}^N f(x)|}{|t|^{s(x)/\kappa_j}}, \quad (4)$$

где снова $N = [s_+/\kappa_-] + 1$. Очевидно, что $\|f\|'_{C_x^{s(\cdot)}} \leq \|f\|_{C_x^{s(\cdot)}}$. Заметим, что при фиксированном $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ и фиксированных x_k , $k \neq j$, для любых двух натуральных чисел N_j , удовлетворяющих условию $N_j > s_+/\kappa_j$, нормы $\sup_{x_j \in \mathbb{R}^1} |f(x)| + \sup_{t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \sup_{x_j \in \mathbb{R}^1} \frac{|\delta_{te_j}^{N_j} f(x)|}{|t|^{s(x)/\kappa_j}}$ эквивалентны [3, с. 243; 9].

Тогда норма (4) эквивалентна норме $\|f\|''_{C_x^{s(\cdot)}} = \|f\|_{L^\infty} + \sum_{j=1}^n \sup_{h_j \in \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|\delta_{h_j e_j}^{N_j} f(x)|}{|h_j|^{s(x)/\kappa_j}}$, где натуральные числа $N_j > s_+/\kappa_j$ для всех $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Анизотропные пространства Гёльдера – Зигмунда $\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$

Для того чтобы построить анизотропное пространство Гёльдера – Зигмунда с показателем гладкости, возможно, принимающим отрицательные значения, нам потребуется разбиение единицы Литлвуда – Пэли, модифицированное для анизотропного случая [13, с. 241]. Пусть функция $\lambda_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\lambda_0(\xi) = 1$ при $|\xi|_{\kappa} \leq 1$ и $\lambda_0(\xi) = 0$ при $|\xi|_{\kappa} \geq 2$. Если $\lambda(\xi) = \lambda_0(\xi) - \lambda_0(2^{\kappa}\xi)$, то по определению $\lambda_j(\xi) = \lambda(2^{-j\kappa}\xi)$ при $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \lambda_j(\xi) = 1$.

Очевидно, что для носителей функций λ (с индексами и без) справедливы соотношения $\text{supp } \lambda_0 \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi|_{\kappa} \leq 2\}$, $\text{supp } \lambda \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 1/2 \leq |\xi|_{\kappa} \leq 2\}$ и, следовательно, $\text{supp } \lambda_j \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{j-1} \leq |\xi|_{\kappa} \leq 2^{j+1}\}$ при $j \in \mathbb{N}$. Любая функция $\mu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ порождает сглаживающий псевдодифференциальный оператор $\mu(D)$, действующий на функцию $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ по правилу $\mu(D)f(x) = \int \mu(\xi)\hat{f}(\xi)e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \left(\mu(\xi)\hat{f}(\xi)\right)^\vee$, который продолжается до оператора из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ в $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ядро $\mathcal{K}(z) = \int \mu(\xi)e^{2\pi i z \cdot \xi} d\xi = \mu^\vee(z)$ псевдодифференциального оператора $\mu(D)$ принадлежит $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и позволяет записать оператор $\mu(D)$ в виде свертки $\mu(D)f(x) = \int \mathcal{K}(x-z)f(z) dz = \mathcal{K} * f(x)$.

Определение 2. Пространство $\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)} = \Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ с переменным показателем гладкости s и вектором анизотропности κ состоит из всех распределений $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна норма $\|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}} = \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|2^{js(x)}\lambda_j(D)f\|_{L^\infty} < \infty$.

Непосредственно из определения следует, что если $s_1(x) \leq s_2(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, то имеет место непрерывное вложение $\Lambda_{\kappa}^{s_2(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_{\kappa}^{s_1(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Эквивалентность норм

Лемма. Для любой функции $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int 2^{j(s(x+y)-s(x)+n)} |k(2^{j\kappa}y)| dy = C < \infty. \quad (5)$$

Доказательство. Так как функция s является ограниченной на \mathbb{R}^n и $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то для любого j $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int 2^{j(s(x+y)-s(x)+n)} |k(2^{j\kappa}y)| dy < \infty$.

Для каждого j разобьем \mathbb{R}^n на два множества $\mathcal{X}_j = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y|_{\kappa} < 2^{-j/2}\}$ и $\mathcal{Y}_j = \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y|_{\kappa} \geq 2^{-j/2}\}$. На множестве \mathcal{X}_j в силу неравенства (1) имеем $j|s(x+y) - s(x)| \leq 2C_s$. Тогда

$$\int_{\mathcal{X}_j} 2^{j(s(x+y)-s(x)+n)} |k(2^{j\kappa}y)| dy \leq 2^{2C_s} \|k\|_{L^1}. \quad (6)$$

Так как $k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то для любого $M > 0$ существует $C_M > 0$, что $|k(z)| \leq C_M |z|_{\kappa}^{-M}$ для всех $z \in \mathbb{R}^n$. Выберем $M \geq 2s_{\Delta} + n + 1$, тогда на множестве \mathcal{Y}_j

$$\int_{\mathcal{Y}_j} 2^{j(s(x+y)-s(x)+n)} |k(2^{j\kappa}y)| dy \leq C_M 2^{j(s_{\Delta}+n)} \int_{\mathcal{Y}_j} |2^{j\kappa}y|_{\kappa}^{-M} dy = C_M 2^{j(s_{\Delta}+n-M)} \int_{\mathcal{Y}_j} |y|_{\kappa}^{-M} dy.$$

После замены переменных $r = |y|_{\kappa}$ получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{Y}_j} 2^{j(s(x+y)-s(x)+n)} |k(2^{j\kappa}y)| dy &\leq C 2^{j(s_{\Delta}+n-M)} \int_{2^{-j/2}}^{\infty} r^{-M+n-1} dy = \\ &= C' 2^{j(s_{\Delta}+n-M)} (M-n)^{-1} 2^{-\frac{j(n-M)}{2}} = C'' 2^{j(s_{\Delta} - \frac{M-n}{2})} < C'' < \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Неравенства (6) и (7) вместе дают неравенство (5) с константой $C = 2^{2C_s} \|k\|_{L^1} + C''$.

Из доказательства видно, что из условия леммы можно убрать требование дифференцируемости функции k , достаточно ее интегрируемости и используемой оценки на убывание.

Теорема 1. Пусть $s(x) \geq s_- > 0$. Для любых натуральных чисел $N_j > s_+/\kappa_j$, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, существует константа $C = C(\lambda, \kappa, s, N_j)$, такая, что для любой функции $f \in C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ справедлива оценка $\|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ и, следовательно, $C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Для любой функции $f \in C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ конечны нормы $\|f\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} < \infty$. Достаточно доказать, что для любого $j \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка $\|2^{js(\cdot)} \lambda_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ с независимой от j и f постоянной C . При $j = 0$ легко видеть, что $\|\lambda_0(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\mathcal{K}_0 * f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\mathcal{K}_0\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$.

Пусть $j > 0$. На множестве $\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 1/2 \leq |\xi|_{\chi} \leq 2\}$ (где находится носитель функции $\lambda(\xi)$) построим конечное покрытие открытыми множествами и соответствующее бесконечно дифференцируемое разбиение единицы v_k , $1 \leq k \leq n$, такие, что каждое множество покрытия с носителем функции v_m находится во множестве $\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{4^{\chi_m \sqrt{n}}} \leq |\xi_m| \leq 2\}$, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Если ввести функции $\lambda^{(m)}(\xi) = \lambda(\xi)v_m(\xi)$, получим $\lambda = \sum_{m=1}^n \lambda^{(m)}$. Далее понадобятся векторы $h_{j,m} = t_{j,m}e_m$ с одной (m -й) ненулевой компонентой, равной $t_{j,m} = 2^{(-j-3)\chi_m}$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq m \leq n$. Для векторов $h_{j,m}$ справедливо равенство $8^{-s(y)}|h_{j,m}|_{\chi}^{-s(y)} = 8^{-s(y)}|t_{j,m}|^{-s(y)/\chi_m} = 2^{js(y)}$. Тогда для заданной функции $f \in C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ получим

$$\lambda_j^{(m)}(D)f = \left(\lambda^{(m)}(2^{-j\chi}\xi) (e^{2\pi i \xi_m t_{j,m}} - 1)^{-N_m} (e^{2\pi i \xi_m t_{j,m}} - 1)^{N_m} \hat{f}(\xi) \right)^{\vee}.$$

Применение хорошо известной формулы $\widehat{\delta_h^k f}(\xi) = (e^{2\pi i \xi \cdot h} - 1)^k \hat{f}(\xi)$ дает следующее равенство:

$$\lambda_j^{(m)}(D)f = \left(\lambda^{(m)}(2^{-j\chi}\xi) (e^{2\pi i 2^{-j\chi m} \xi_m 8^{-\chi_m}} - 1)^{-N_m} \widehat{\delta_{h_{j,m}}^{N_m} f}(\xi) \right)^{\vee}.$$

Рассмотрим функцию $\zeta^{(m)}(\xi) = \lambda^{(m)}(\xi) (e^{2\pi i \xi_m 8^{-\chi_m}} - 1)^{-N_m}$. Если $\xi \in \text{supp } \lambda^{(m)}$, то по определению этой функции имеют место неравенства

$$\frac{1}{4^{\chi_m \sqrt{n}}} \leq |\xi_m| \leq 2^{\chi_m} \Leftrightarrow \frac{1}{32^{\chi_m \sqrt{n}}} \leq |\xi_m 8^{-\chi_m}| \leq 4^{-\chi_m}.$$

Поэтому $0 < |\xi_m 8^{-\chi_m}| < 1$ и тогда $e^{2\pi i \xi_m 8^{-\chi_m}} - 1 \neq 0$. Значит, функция $\zeta^{(m)} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если ввести функцию $\zeta_j^{(m)}(\xi) = \zeta^{(m)}(2^{-j\chi}\xi) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, получим равенство $\lambda_j^{(m)}(D)f = \zeta_j^{(m)}(D)\delta_{h_{j,m}}^{N_m} f = \mathcal{T}_j^{(m)} * \delta_{h_{j,m}}^{N_m} f$, где ядро $\mathcal{T}_j^{(m)}$ оператора $\zeta_j^{(m)}(D)$ принадлежит пространству $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Отсюда, умножая левую и правую части предыдущего равенства на $2^{js(x)}$, получим

$$\begin{aligned} |2^{js(x)} \lambda_j^{(m)}(D)f(x)| &= |2^{js(x)} \int \mathcal{T}_j^{(m)}(x-y) \delta_{h_{j,m}}^{N_m} f(y) dy| = \\ &= \left| \int \mathcal{T}_j^{(m)}(x-y) 2^{j(s(x)-s(y))} 2^{js(y)} \delta_{h_{j,m}}^{N_m} f(y) dy \right| \leq \\ &\leq \int |\mathcal{T}_j^{(m)}(x-y)| 2^{j(s(x)-s(y))} 8^{-s(y)} |h_{j,m}|^{-s(y)/\chi_m} |\delta_{h_{j,m}}^{N_m} f(y)| dy \leq \\ &\leq C \|f\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)} \int |\mathcal{T}_j^{(m)}(z)| 2^{j(s(x)-s(x-z))} dz. \end{aligned}$$

По лемме последний интеграл ограничен по j и x , следовательно,

$$|2^{js(x)} \lambda_j^{(m)}(D)f(x)| \leq C \|f\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}.$$

Так как

$|2^{js(x)} \lambda_j(D)f(x)| = |2^{js(x)} \sum_{m=1}^n \lambda_j^{(m)}(D)f(x)| \leq \sum_{m=1}^n |2^{js(x)} \lambda_j^{(m)}(D)f(x)| \leq C \|f\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}$ с независимой от x , j и f постоянной C , то окончательно получим требуемое неравенство $\|\cdot\|_{\Lambda_{\chi}^{s(\cdot)}} \leq C \|\cdot\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}}$. Простым следствием этого неравенства является $\|\cdot\|_{\Lambda_{\chi}^{s(\cdot)}} \leq C \|\cdot\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}}^{(N)}$ и, в частности, $\|\cdot\|_{\Lambda_{\chi}^{s(\cdot)}} \leq C \|\cdot\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}}$, откуда следует $C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset \Lambda_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 2. Пусть $s(x) \geq s_- > 0$. Существует постоянная $C > 0$, такая, что для любого распределения $f \in \Lambda_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ верно неравенство $\|f\|_{C_{\chi}^{s(\cdot)}} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\chi}^{s(\cdot)}}$ и, следовательно, имеет место непрерывное вложение $\Lambda_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset C_{\chi}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Достаточно доказать справедливость неравенства для норм. Из того, что $f \in \Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, получаем неравенство $\|\lambda_j(D)f\|_{L^\infty} \leq 2^{-js_-} \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}}$.

Пусть $\psi_j = \lambda_{j-1} + \lambda_j + \lambda_{j+1}$ (где $\lambda_{-1} = 0$). Так как $\psi_j(\xi)\lambda_j(\xi) = \lambda_j(\xi)$ для любого j , то для каждого распределения $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет место следующее равенство:

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(D)\lambda_j(D)f, \quad (8)$$

причем последний ряд сходится в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Формулу (8) можно записать в виде

$$f = \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{T}_j * \lambda_j(D)f, \quad (9)$$

где $\mathcal{T}_j = \mathcal{K}_{j-1} + \mathcal{K}_j + \mathcal{K}_{j+1}$ – ядро интегрального оператора $\psi_j(D)$. Пусть теперь $f \in \Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, тогда для любого мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\|\partial^\alpha(\psi_j(D)\lambda_j(D)f)\|_{L^\infty} \leq 2^{j\alpha \cdot \kappa} \|(\partial^\alpha \mathcal{T})_j\|_{L^1} \|\lambda_j(D)f\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}} 2^{j(\alpha \cdot \kappa - s_-)}. \quad (10)$$

Если взять такое α , что $\alpha \cdot \kappa < s_-$ и, в частности, $\alpha = 0$, то из (10) следует, что ряд в (9) сходится по норме L^∞ . Значит, распределение f регулярно и совпадает с ограниченной и непрерывной функцией (вне множества меры ноль). Попутно из (10) также можно заметить, что с помощью умножения распределения f на гладкую срезающую функцию, в том случае, когда в точке x средняя гладкость $s(x) > \alpha \cdot \kappa$, функция f в этой точке x имеет непрерывную анизотропную производную порядка α .

Пусть $N \geq [s_+/\kappa_-] + 1$, тогда для любого $h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$,

$$|h|_{\kappa}^{-s(x)} \delta_h^N f(x) = |h|_{\kappa}^{-s(x)} \sum_{j=0}^{\infty} \delta_h^N \mathcal{T}_j * \lambda_j(D)f(x).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left| |h|_{\kappa}^{-s(x)} \delta_h^N f(x) \right| &\leq \left| \sum_{j=0}^{\infty} |h|_{\kappa}^{-s(x)} \int \delta_h^N \mathcal{T}_j(y) 2^{-js(x-y)} 2^{js(x-y)} \lambda_j(D)f(x-y) dy \right| \leq \\ &\leq \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}} \sum_{j=0}^{\infty} |h|_{\kappa}^{-s(x)} \int |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как $\delta_h^N \mathcal{T}_j(y) = \sum_{m=0}^N C_N^m (-1)^{N-m} \mathcal{T}_j(y+mh)$, то, используя неравенство (2) m раз, получим

$$\begin{aligned} |h|_{\kappa}^{-s(x)} \int |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy &\leq C \int \sum_{m=0}^N C_N^m |h|_{\kappa}^{-s(x+mh)} |\mathcal{T}_j(y+mh)| 2^{-js(x-y)} dy \leq \\ &\leq C \sum_{m=0}^N |2^{j\kappa} h|_{\kappa}^{-s(x+mh)} \int |\mathcal{T}_j(y)| 2^{j(s(x+mh)-s(x+mh-y))} dy. \end{aligned} \quad (12)$$

По лемме интеграл в (12) ограничен константой, независимой от j, x, m, h . Значит, при условии $|2^{j\kappa} h|_{\kappa} \geq 1$ получаем

$$|h|_{\kappa}^{-s(x)} \int |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy \leq C |2^{j\kappa} h|_{\kappa}^{-s_-}. \quad (13)$$

С другой стороны, для ядра свертки $\mathcal{T}_j(x) = 2^{jn} \mathcal{T}(2^{j\kappa} x)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $j \in \mathbb{N}$, используя теорему Лагранжа о конечном приращении, теорему Фубини и свойство (2) показателя гладкости s , получим

$$\begin{aligned} |h|_{\kappa}^{-s(x)} \int |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy &\leq \\ &\leq |h|_{\kappa}^{-s(x)} \int dy \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{|\alpha|=N} |h^\alpha \partial^\alpha \mathcal{T}_j(y + \sum_{k=1}^N t_k h)| 2^{-js(x-y)} dt \leq \\ &\leq C |h|_{\kappa}^{-s(x)} \int_0^1 \dots \int_0^1 \sum_{|\alpha|=N} |h^\alpha| 2^{j\alpha \cdot \kappa} \int 2^{jn} |(\partial^\alpha \mathcal{T})(2^{j\kappa} y)| 2^{-js(x'-y)} dy dt \leq \\ &\leq C \int_0^1 \dots \int_0^1 |2^{j\kappa} h|_{\kappa}^{-s(x')} \sum_{|\alpha|=N} |h^\alpha| 2^{j\alpha \cdot \kappa} \int 2^{jn} |(\partial^\alpha \mathcal{T})(2^{j\kappa} y)| 2^{js(x')-js(x'-y)} dy dt, \end{aligned}$$

где $dt = dt_1 \dots dt_N$. Последнее выражение оценивается через

$$C \int_0^1 \dots \int_0^1 |2^{j\kappa} h|_{\kappa}^{-s(x')} \sum_{|\alpha|=N} |(2^{j\kappa} h)^\alpha| dt \leq C \sup_{x' \in \mathbb{R}^n} |2^{j\kappa} h|_{\kappa}^{-s(x')} \sum_{|\alpha|=N} |2^{j\kappa} h|_{\kappa}^{\alpha \cdot \kappa},$$

где $x' = x + \sum_{k=1}^N t_k h$. Для $j = 0$ нужно провести те же выкладки с заменой функции \mathcal{T} функцией \mathcal{T}_0 . Тогда при $|2^{j\kappa} h|_{\kappa} < 1$ имеем

$$|h|_{\kappa}^{-s(x)} \int |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy \leq C |2^{j\kappa} h|_{\kappa}^{N\kappa_- - s_+}, \quad (14)$$

где C не зависит от h, x, j . Пусть целое число $j_0 = j_0(h)$ такое, что $2^{j_0-1} |h|_{\kappa} < 1$ и $2^{j_0} |h|_{\kappa} > 1$. Из (11) следует, что

$$\left\| |h|_{\kappa}^{-s(\cdot)} \delta_h^N f \right\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=0}^{j_0-1} + \sum_{j=j_0}^{\infty} \right) |h|_{\kappa}^{-s(x)} \int |\delta_h^N \mathcal{T}_j(y)| 2^{-js(x-y)} dy.$$

С учетом неравенств (13) и (14) имеем

$C^{-1} \left\| |h|_{\kappa}^{-s(\cdot)} \delta_h^N f \right\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}} \left(\sum_{j=0}^{j_0-1} |2^{j\kappa} h|_{\kappa}^{\gamma} + \sum_{j=j_0}^{\infty} |2^{j\kappa} h|_{\kappa}^{-s_-} \right)$, где $\gamma = N\kappa_- - s_+ > 0$ с учетом выбора числа N . Суммы нетрудно оценить. Получаем

$$\left\| |h|_{\kappa}^{-s(\cdot)} \delta_h^N f \right\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}} \left(\frac{2^{\gamma}}{2^{\gamma-1}} + \frac{2^{s_-}}{2^{s_- - 1}} \right).$$

Так как выражение, стоящее справа в неравенстве, не зависит от h , то

$$\sup_{h \neq 0} \left\| |h|_{\kappa}^{-s(\cdot)} \delta_h^N f \right\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}}.$$

Наконец, с учетом (9) и (10) получаем, что существует постоянная $C > 0$, такая, что для любого распределения $f \in \Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ имеет место неравенство $\|f\|_{C_{\kappa}^{s(\cdot)}} \leq C \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}}$, откуда следует $\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n) \subset C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, в этих двух теоремах при $s_- > 0$ доказана эквивалентность норм $\|\cdot\|_{C_{\kappa}^{s(\cdot)}}$, $\|\cdot\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}}$ и совпадение пространств $\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$, $C_{\kappa}^{s(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Нетрудно видеть, что на самом деле во второй теореме доказано чуть больше, а именно справедливо неравенство $\|f\|_{C_{\kappa}^{s(\cdot)}}^{(N)} \leq C(N) \|f\|_{\Lambda_{\kappa}^{s(\cdot)}}$ для $N \geq [s_+/\kappa_-] + 1$. Из первой теоремы следует обратное неравенство. В итоге все нормы $\|\cdot\|_{C_{\kappa}^{s(\cdot)}}$, $\|\cdot\|'_{C_{\kappa}^{s(\cdot)}}$, $\|\cdot\|''_{C_{\kappa}^{s(\cdot)}}$ эквивалентны при указанных значениях N и N_j .

Список источников

1. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969. 480 с.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975. 479 с.
3. Triebel H. Theory of Function spaces III. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser Verlag, 2006. 426 p.
4. Farkas W. Atomic and subatomic decomposition in anisotropic function spaces // Mathematische Nachrichten. 2000. Vol. 209, № 1. P. 83–113.
5. Dachkovski S. Anisotropic function spaces and related semi-linear hypoelliptic equations // Mathematische Nachrichten. 2003. Vol. 248–249, № 1. P. 40–61.
6. Krylov N.V. Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces. Providence: American Math. Society, 1996. 164 p.
7. Конёнков А.Н. Задача Коши для параболических уравнений в пространствах Зигмунда // Диф. уравнения. 2006. Т. 42, № 6. С. 867–873.
8. Grafakos L. Modern Fourier Analysis. New York: Springer, 2014. 624 p.
9. Кряквин В.Д. Об ограниченности псевдодифференциальных операторов в пространствах Гёльдера – Зигмунда переменного порядка // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1315–1327.
10. Кряквин В.Д., Рabinovich V.S. Pseudodifferential operators in weighted Hölder-Zygmund spaces of the variable smoothness // Operator Theory: Advances and Applications. 2017. Vol. 259. P. 511–531.
11. Бесов О.В. Об интерполяции, вложении и продолжении пространств функций переменной гладкости // Докл. Академии наук. 2005. Т. 401, № 1. С. 7–11.
12. Bies P.M., Gorka P. Schauder theory in variable Hölder spaces // J. Differential Equations. 2015. Vol. 259. P. 2850–2883.
13. Stein E.M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. Princeton: University Press, 1993. 695 p.

References

1. Nikol'skii S.M. Approximation of functions of several variables and imbedding theorems. Moscow: Nauka Publ.; 1969. 480 p. (In Russ.).
2. Besov O.V., Il'in V.P., Nikol'skii S.M. Integral representations of functions, and embedding theorems. Moscow: Nauka Publ.; 1975. 479 p. (In Russ.).
3. Triebel H. Theory of Function spaces III. Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser Verlag; 2006. 426 p.
4. Farkas W. Atomic and subatomic decomposition in anisotropic function spaces. Mathematische Nachrichten. 2000;209(1):83-113.

5. Dachkovski S. Anisotropic function spaces and related semi-linear hypoelliptic equations. *Mathematische Nachrichten*. 2003;248-249(1):40-61.
6. Krylov N.V. *Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Hölder Spaces*. Providence: American Math. Society, 1996. 164 p.
7. Konenkov A.N. The Cauchy problem for parabolic equations in Zygmund spaces. *Differential Equations*. 2006;42(6):867-873. (In Russ.).
8. Grafakos L. *Modern Fourier Analysis*. New York: Springer; 2014. 624 p.
9. Kryakvin V.D. Boundedness of pseudodifferential operators in Hölder-Zygmund spaces of variable order. *Siberian Mathematical Journal*. 2014;55(6):1315-1327. (In Russ.).
10. Kryakvin V.D., Rabinovich V.S. Pseudodifferential operators in weighted Hölder-Zygmund spaces of the variable smoothness. *Operator Theory: Advances and Applications*. 2017;259:511-531.
11. Besov O.V. On the interpolation, embedding, and extension of spaces of functions of variable smoothness. *Doklady Mathematics*. 2005;401(1):7-11. (In Russ.).
12. Bies P.M., Gorka P. Schauder theory in variable Hölder spaces. *J. Differential Equations*. 2015;259:2850-2883.
13. Stein E. M. *Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*. Princeton: University Press, 1993. 695 p.

Информация об авторе

А.Б. Бабаев – ассистент, кафедра алгебры и дискретной математики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Information about the author

A.B. Babaev - Assistant, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

Статья поступила в редакцию 19.07.2024; одобрена после рецензирования 10.08.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 19.07.2024; approved after reviewing 10.08.2024; accepted for publication 16.10.2024.

Научная статья

УДК 539.3

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-13-23

ОБ АНАЛИЗЕ ДИСПЕРСИОННОГО МНОЖЕСТВА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ОРТОТРОПНОГО УПРУГОГО ВОЛНОВОДА

Александр Ованесович Ватulyян¹, Виктор Олегович Юров²

^{1, 2} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^{1, 2} Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

¹ aovatulyan@sfedu.ru

² vitja.jurov@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена задача о распространении волн в упругом ортотропном неоднородном цилиндрическом волноводе с произвольным поперечным сечением. Дисперсионные зависимости построены численно на основе слабой постановки при помощи метода конечных элементов. Получены асимптотики дисперсионных ветвей в окрестности частот загибания. Доказана положительная определенность основного оператора задачи. Проведена серия вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: цилиндрический волновод, неоднородность, асимптотический анализ, анизотропия, спектральный пучок, дисперсионные соотношения

Для цитирования: Ватulyян А.О., Юров В.О. Об анализе дисперсионного множества для неоднородного ортотропного упругого волновода // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 13–23.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

ON DISPERSION SET ANALYSIS FOR AN INHOMOGENEOUS ORTHOTROPIC ELASTIC WAVEGUIDE

Alexander O. Vatulyan¹, Viktor O. Yurov²

^{1, 2} Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

^{1, 2} Southern Mathematical Institute - Branch of Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia - Alania, Russia

¹ aovatulyan@sfedu.ru

² vitja.jurov@yandex.ru

Abstract. The problem of wave propagation in an elastic orthotropic inhomogeneous cylindrical waveguide with an arbitrary cross-section is considered. Dispersion dependences are constructed numerically based on a weak statement using finite element method. Asymptotics of dispersion branches in the vicinity of cut-off frequencies are also constructed. Positive definiteness of the main operator of the problem is proved. A series of computational experiments are carried out.

Keywords: cylindrical waveguide, inhomogeneity, asymptotic analysis, anisotropy, spectral bunch, dispersion relations

For citation: Vatulyan A.O., Yurov V.O. On Dispersion Set Analysis for an Inhomogeneous Orthotropic Elastic Waveguide. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):13-23. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

© Ватulyян А.О., Юров В.О., 2024

Введение

Функционально-градиентные материалы (ФГМ), получившие заметное распространение в настоящее время, обладают рядом преимуществ по сравнению с однородными материалами и слоистыми композитами при создании элементов конструкций. При изучении волновых процессов в протяженных структурах для их детального анализа часто применяется модель упругого волновода. Протяженные структуры при этом могут иметь как локальные неоднородности, обусловленные технологией процесса изготовления (сварные швы, трещины, включения), так и некруговую форму поперечного сечения. Модель упругого анизотропного волновода используется при определении эффективных упругих параметров слоистых структур [1, 2]. Локальная неоднородность по осевой координате волновода обычно учитывается асимптотически [3] или при помощи гибридных схем [4]. Так, в [3] изучается задача о распространении волн в волноводе с круговой трещиной: составляется система гиперсингулярных интегральных уравнений относительно функций раскрытия, строится поле перемещений на внешней границе волновода. В случае малой трещины учитываются только главные части интегральных операторов, поле перемещений строится при помощи теории вычетов с учетом асимптотических формул для функций раскрытия. В [4] разрабатываются гибридные численно-аналитические подходы для моделирования процесса возбуждения, распространения и дифракции бегущих волн в структурах с локальными неоднородностями, основанные на сопряжении численного решения в локальной окрестности неоднородности и/или источника с явным аналитическим представлением полей в полубесконечной внешней области.

Исследование волновых полей при наличии неоднородности регулярных волноводов в поперечном сечении приводит к двумерной спектральной задаче с переменными коэффициентами на сечении волновода [5]. Общие закономерности распространения волн и структуры дисперсионного множества подробно изучены для полосы и цилиндрических волноводов с канонической круговой формой поперечного сечения: волны в упругой неоднородной анизотропной полосе – в [6], в цилиндре с кольцевым сечением при учете радиальной неоднородности – в [7, 8]. В [9, 10] рассмотрены задачи о колебаниях погруженного во внешнюю среду волновода с произвольным поперечным сечением. Задача на поперечном сечении решается при помощи метода конечных элементов (МКЭ), а влияние внешней среды учитывается модифицированными граничными условиями [9] и идеально согласованными слоями (PML) [10]. В [11] при расчёте дисперсионных кривых для вязкоупругого волновода, погруженного в невязкую жидкость, предложена гибридная схема: твердотельная часть смоделирована при помощи МКЭ, жидкая среда – методом граничных элементов.

Для моделирования затухания в протяженных структурах используется модель вязкоупругого волновода. В [12] рассмотрена задача о волнах в бесконечном сплошном круговом цилиндре из наследственно-упругого материала, где для описания вязкоупругих свойств применяются интегральные операторы с дробно-экспоненциальным ядром. В [13] в рамках модели Кельвина – Фойгта представлено решение динамической задачи для распространения вязкоупругих волн в ФГМ-пластинах. Исследовано влияние вязкости на дисперсионные кривые, проиллюстрировано действие степенного закона неоднородности. В [14] изучаются волны в полой неоднородной вязкоупругой ФГ-цилиндре. Показано, что по сравнению с традиционной вязкоупругой моделью с производными целочисленного порядка вязкоупругая модель с производными дробного порядка является более адекватной при описании экспериментальных данных. Учтено влияние порядка, а также степенной неоднородности и относительной толщины на кривые дисперсии и затухания.

В настоящей работе рассматриваются свободные колебания неоднородного ортотропного регулярного волновода с произвольным поперечным сечением, некоторые математические аспекты [5, 15] квадратичных операторных пучков с параметрами, к которым сводятся соответствующие краевые задачи, а также развиты асимптотические методы и вычислительные схемы анализа структуры дисперсионного множества.

Постановка задачи

Рассмотрим цилиндрический волновод с произвольным поперечным сечением, занимающий область $V = \Omega \times [-\infty < x_3 < \infty]$, где $\Omega = \Omega(x_1, x_2)$ – поперечное сечение с липшицевой границей $S = \partial\Omega$. Будем считать, что волновод совершает установившиеся колебания по закону $\exp(-i\omega t)$.

Уравнения установившихся колебаний имеют вид

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Здесь ω – частота колебаний; ρ – плотность; u_i – амплитуды смещений; σ_{ij} – компоненты тензора напряжений Коши. Определяющие соотношения для ортотропного материала (обобщенный закон Гука) имеют вид [16]

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}u_{1,1} + C_{12}u_{2,2} + C_{13}u_{3,3}, & \sigma_{23} &= C_{44}(u_{2,3} + u_{3,2}), \\ \sigma_{22} &= C_{12}u_{1,1} + C_{22}u_{2,2} + C_{23}u_{3,3}, & \sigma_{13} &= C_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}), \\ \sigma_{33} &= C_{13}u_{1,1} + C_{23}u_{2,2} + C_{33}u_{3,3}, & \sigma_{12} &= C_{66}(u_{1,2} + u_{2,1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Упругие параметры C_{ij} , $i, j = \overline{1,6}$, являются функциями координат (x_1, x_2) . Определяющие соотношения для изотропного тела получаются при $C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu$, $C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda$, $C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu$, где $\lambda(x_1, x_2)$, $\mu(x_1, x_2)$ – параметры Ламе.

Пусть $S = S_\sigma \cup S_u$, где S_u – часть жестко заземленной границы; S_σ – часть границы, свободная от нагружения. Так как волновод – цилиндрический, то нормаль n к внешней границе волновода ортогональна оси волновода (ось волновода совпадает с осью x_3) и, таким образом, $n_3 = 0$. Будем считать, что граничные условия на поверхности волновода представимы в форме

$$\begin{aligned} n_1\sigma_{11} + n_2\sigma_{12}|_{S_\sigma} &= 0, & n_1\sigma_{12} + n_2\sigma_{22}|_{S_\sigma} &= 0, & n_1\sigma_{13} + n_2\sigma_{23}|_{S_\sigma} &= 0, \\ u_i|_{S_u} &= 0, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение однородной краевой задачи (1)–(3) представим в виде бегущей волны ($u_j = u_j \exp(ikx_3)$, $j = 1, 2, 3$), характеризующейся волновым числом k . Отделяя множитель $\exp(ikx_3)$, запишем уравнения колебаний и определяющие соотношения в виде

$$\begin{cases} \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} + ik\sigma_{13} + \rho\omega^2 u_1 = 0 & \sigma_{11} = C_{11}u_{1,1} + C_{12}u_{2,2} + C_{13}iku_3 & \sigma_{23} = C_{44}(iku_2 + u_{3,2}) \\ \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + ik\sigma_{23} + \rho\omega^2 u_2 = 0 & \sigma_{22} = C_{12}u_{1,1} + C_{22}u_{2,2} + C_{23}iku_3 & \sigma_{13} = C_{55}(iku_1 + u_{3,1}) \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + ik\sigma_{33} + \rho\omega^2 u_3 = 0 & \sigma_{33} = C_{13}u_{1,1} + C_{23}u_{2,2} + C_{33}iku_3 & \sigma_{12} = C_{66}(u_{1,2} + u_{2,1}) \end{cases}.$$

Вводим следующие безразмерные параметры и функции:

$$X_1 = u_1 d^{-1}, \quad X_2 = u_2 d^{-1}, \quad X_3 = -iu_3 d^{-1}, \quad S_{ij} = \begin{cases} -i\sigma_{ij}\mu_0^{-1}, & ij = 13, 23 \\ \sigma_{ij}\mu_0^{-1}, & ij \neq 13, 23 \end{cases},$$

$$c_{ij} = C_{ij}\mu_0^{-1}, \quad g_1 = \lambda\mu_0^{-1}, \quad g_2 = \mu\mu_0^{-1}, \quad g_3 = \rho\rho_0^{-1},$$

$$\gamma = kd, \quad \tilde{x} = x_1 d^{-1}, \quad \tilde{y} = x_2 d^{-1}, \quad \tilde{z} = x_3 d^{-1}, \quad \kappa^2 = \rho_0 \omega^2 d^2 \mu_0^{-1},$$

где μ_0 – характерное значение одного из упругих параметров, например $\mu_0 = \max_{\Omega} C_{44}$;

$d = \max_{A, B \in \Omega} \|A - B\|$ – характерный размер области Ω ; $\rho_0 = \max_{\Omega} \rho$. Далее символ \sim в безразмерных координатах будет опущен, а обозначения для производных сохранены.

Операторная форма задачи

С учетом введенных безразмерных параметров и функций перепишем задачу в виде операторного уравнения. В качестве вектора неизвестных будем использовать безразмерный вектор $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$. Введем матричные операторы и перейдем от скалярной формы к безразмерной векторной. Задача сводится к анализу вещественного операторного пучка с двумя спектральными параметрами:

$$(\mathbf{A}_0 + \gamma\mathbf{A}_1 + \gamma^2\mathbf{A}_2 + \kappa^2 g_3 \mathbf{I})\mathbf{X} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{X}|_{S_u} = 0, \quad (\mathbf{B}_0 + \gamma\mathbf{B}_1)\mathbf{X}|_{S_\sigma} = 0. \quad (5)$$

Для ортотропного неоднородного в поперечном сечении волновода введенные выше операторы имеют вид

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_0 &= \begin{pmatrix} \partial_1 c_{11} \partial_1 + \partial_2 c_{66} \partial_2 & \partial_1 c_{12} \partial_2 + \partial_2 c_{66} \partial_1 & 0 \\ \partial_1 c_{66} \partial_2 + \partial_2 c_{12} \partial_1 & \partial_2 c_{22} \partial_2 + \partial_1 c_{66} \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1 c_{55} \partial_1 + \partial_2 c_{44} \partial_2 \end{pmatrix}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \\
 \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_1 c_{13} - c_{55} \partial_1 \\ 0 & 0 & -\partial_2 c_{23} - c_{44} \partial_2 \\ c_{13} \partial_1 + \partial_1 c_{55} & c_{23} \partial_2 + \partial_2 c_{44} & 0 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{A}_2 &= \begin{pmatrix} -c_{55} & 0 & 0 \\ 0 & -c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & -c_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{B}_0 &= \begin{pmatrix} c_{11} n_1 \partial_1 + c_{66} n_2 \partial_2 & c_{12} n_1 \partial_2 + c_{66} n_2 \partial_1 & 0 \\ c_{66} n_1 \partial_2 + c_{12} n_2 \partial_1 & c_{66} n_1 \partial_1 + c_{22} n_2 \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_{55} n_1 \partial_1 + c_{44} n_2 \partial_2 \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{B}_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -c_{13} n_1 \\ 0 & 0 & -c_{23} n_2 \\ c_{55} n_1 & c_{44} n_2 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Определение дисперсионного множества

Отметим, что однородная задача (4), (5) всегда имеет тривиальное решение. Назовем точкой дисперсионного множества такую пару спектральных параметров (κ, γ) , при которых эта задача имеет нетривиальное решение. В ряде случаев для канонических областей Ω (например, круга) и при постоянстве упругих параметров и плотности могут быть записаны явные дисперсионные уравнения (через цилиндрические функции [6]), связывающие спектральные параметры. В общем случае будем говорить о неявном соотношении $D(\kappa, \gamma) = 0$, определяющем дисперсионное множество.

Для анализа задачи (4), (5) сначала исследуем случай $\gamma = 0$. Можно показать, что существует счётное множество точек дисперсионного множества вида $(\kappa_j, 0)$, соответствующих собственным частотам краевой задачи на поперечном сечении Ω , именуемых в литературе точками запириания; им соответствуют стоячие волны. С учетом блочной структуры оператора $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \kappa^2 \mathbf{g}_3 \mathbf{I}$ разделим эту задачу на две подзадачи. Подзадачей 1 будем называть задачу относительно неизвестных X_1, X_2 , подзадачей 2 – относительно X_3 . Подзадачи описывают различные типы движения, а точки запириания разделятся, соответственно, на два семейства. Далее будем считать, что среди этих точек нет кратных (точки, которые принадлежат двум семействам одновременно). Исключение составляет точка $(0,0)$, которая принадлежит дисперсионному множеству для волновода со свободной границей. В силу аналитичности компонент дисперсионного множества продолжением по параметру эти ветви могут быть продлены на бесконечность [6]. Точки дисперсионного множества в совокупности образуют дисперсионные ветви.

Дисперсионное множество обладает несколькими свойствами симметрии. Так, очевидно, что если $D(\kappa_1, \gamma_1) = 0$, то $D(-\kappa_1, \gamma_1) = 0$. Можно доказать, что $D(\kappa_1, -\gamma_1) = 0$. Это свойство справедливо для упругих изотропных и ортотропных волноводов. Оно доказывается с учетом структуры матричных операторов (6) при получении решений вида $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)^T$, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, -X_3)^T$.

Рассмотрим далее некоторые аспекты задачи об отыскании дисперсионных ветвей. Изучим возможность численного построения ветвей дисперсионного множества с помощью решения задач на сечении при фиксированном значении γ . Кроме того, будем исследовать структуру дисперсионных ветвей при помощи построения их асимптотик в окрестности точек запириания.

Слабая постановка

Для численной реализации в МКЭ-пакете FreeFem++ будем использовать слабую постановку задачи. Для ее формулировки скалярно умножим векторное уравнение (4) на пробную гладкую вектор-функцию $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$, удовлетворяющую главным граничным условиям задачи $\mathbf{Y}|_{S_u} = 0$, и проинтегрируем по области поперечного сечения Ω . Далее для краткости записи введем обозначение $Lf = \int_{\Omega} f d\Omega$. Используя формулу Грина, приведем эту форму к симметричному виду

$$L(P_0 + \gamma P_1 + \gamma^2 P_2 - \kappa^2 g_3 P_3) - \int_S ((n_1 S_{11} + n_2 S_{12})Y_1 + (n_1 S_{12} + n_2 S_{22})Y_2 + (n_1 S_{13} + n_2 S_{23})Y_3) dS = 0,$$

где $S_{11} = c_{11}X_{1,1} + c_{12}X_{2,2} - \gamma c_{13}X_3$, $S_{12} = c_{66}(X_{1,2} + X_{2,1})$, $S_{22} = c_{12}X_{1,1} + c_{22}X_{2,2} - \gamma c_{23}X_3$,

$$S_{13} = c_{55}(X_{3,1} + \gamma X_1), \quad S_{23} = c_{44}(X_{3,2} + \gamma X_2),$$

$$P_0 = c_{11}X_{1,1}Y_{1,1} + c_{22}X_{2,2}Y_{2,2} + c_{12} [X_{2,2}Y_{1,1} + X_{1,1}Y_{2,2}] + c_{66}(X_{1,2} + X_{2,1})(Y_{1,2} + Y_{2,1}) + c_{55}X_{3,1}Y_{3,1} + c_{44}X_{3,2}Y_{3,2},$$

$$P_1 = c_{55}(X_{3,1}Y_1 + X_1Y_{3,1}) + c_{44}(X_{3,2}Y_2 + X_2Y_{3,2}) - c_{13}(X_{1,1}Y_3 + X_3Y_{1,1}) - c_{23}(X_{2,2}Y_3 + X_3Y_{2,2}),$$

$$P_2 = c_{55}X_1Y_1 + c_{44}X_2Y_2 + c_{33}X_3Y_3, \quad P_3 = X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_3.$$

Асимптотическое разложение по параметру

Уравнения (4) и граничные условия (5) имеют определенную структуру – квадратичную относительно спектральных параметров. Будем аналитически исследовать решение задачи, начиная с рассмотрения случая малого волнового числа γ .

Решая в общем случае численно краевую задачу при $\gamma = 0$, находим точки загибания. Для некоторой найденной точки $(\kappa_0, 0)$ вводим обозначение $\tau_0 = \kappa_0^2$. Будем отыскивать закон дисперсии в виде разложения

$$\kappa^2 = \tau_0 + \tau_1\gamma + \tau_2\gamma^2 + \tau_3\gamma^3 + \tau_4\gamma^4 + \dots \quad (7)$$

Для случая $\tau_0 = 0$ потребуется найти τ_2 , чтобы описать поведение дисперсионных ветвей продольных и крутильных колебаний, и τ_4 для описания двух ветвей изгибных колебаний. Задача при $\kappa = \gamma = 0$ имеет четыре нетривиальных решения, отвечающих движению волновода как абсолютно твердого тела и порождающих собственные формы: $\mathbf{X} = (1, 0, 0)^T$; $\mathbf{X} = (0, 1, 0)^T$; $\mathbf{X} = (-x_2, x_1, 0)^T$; $\mathbf{X} = (0, 0, 1)^T$ (смещения вдоль трех осей и поворот вокруг оси волновода). Дальнейший анализ связан с построением жордановых цепочек [5]. Отметим, что подобные разложения были ранее построены для полосы [17].

Для $\tau_0 \neq 0$ найдем значения параметра τ_2 , что позволит построить квадратичные аппроксимации ветвей дисперсионного множества и различать случаи нормальной ($\tau_2 > 0$) и аномальной ($\tau_2 < 0$) дисперсии.

Вектор-функцию \mathbf{X} представим в виде разложения $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \gamma\mathbf{X}_1 + \gamma^2\mathbf{X}_2 + o(\gamma^2)$. Учитывая структуру исходного спектрального пучка, сформулируем краевые задачи при одинаковых степенях γ .

$$\gamma^0: \mathbf{A}_0\mathbf{X}_0 + \tau_0 g_3 \mathbf{X}_0 = 0, \quad \mathbf{X}_0|_{S_u} = 0, \quad \mathbf{B}_0\mathbf{X}_0|_{S_\sigma} = 0. \quad (8)$$

Задачи при любой другой степени разложения по γ можно представить в виде

$$\mathbf{A}_0\mathbf{X}_j + \tau_0 g_3 \mathbf{X}_j = \mathbf{F}_j, \quad \mathbf{X}_j|_{S_u} = 0, \quad \mathbf{B}_0\mathbf{X}_j = -\mathbf{B}_1\mathbf{X}_{j-1}|_{S_\sigma}. \quad (9)$$

Для $j = 1, 2, 3, 4$ правые части имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= -(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_0 + \tau_1 g_3 \mathbf{X}_0), \\ \mathbf{F}_2 &= -(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \tau_1 g_3 \mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_0 + \tau_2 g_3 \mathbf{X}_0), \\ \mathbf{F}_3 &= -(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_2 + \tau_1 g_3 \mathbf{X}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_1 + \tau_2 g_3 \mathbf{X}_1 + \tau_3 g_3 \mathbf{X}_0), \\ \mathbf{F}_4 &= -(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_3 + \tau_1 g_3 \mathbf{X}_3 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_2 + \tau_2 g_3 \mathbf{X}_2 + \tau_3 g_3 \mathbf{X}_1 + \tau_4 g_3 \mathbf{X}_0). \end{aligned}$$

Все задачи описываются при помощи одинаковых дифференциальных операторов: (8) – однородным оператором ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \tau_0 g_3 \mathbf{I}$), (9) – неоднородными операторами, где меняются только правые части соответствующих операторов. С целью получения условий разрешимости приведенных выше неоднородных задач проанализируем соотношение, вытекающее из (8), (9):

$$\Gamma_j = L \left[\left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0 + \tau_0 g_3 \mathbf{X}_0), \mathbf{X}_j \right] - \left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_j + \tau_0 g_3 \mathbf{X}_j - \mathbf{F}_j), \mathbf{X}_0 \right] \right], \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Для вещественной части дисперсионного множества задача также имеет вещественную структуру, а значит, можно полагать, что $(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_j) = (\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_0)$. Тогда

$$\Gamma_j = L \left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_j) - (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_j, \mathbf{X}_0) + (\mathbf{F}_j, \mathbf{X}_0) \right]. \quad (10)$$

По построению $\Gamma_j = 0$ для любого номера j . Воспользуемся соотношениями (10) для нахождения коэффициентов $\tau_j, j = 1, 2, \dots$. Эти соотношения будем далее называть условиями разрешимости.

Формулы для τ_1, τ_2

В частных случаях соотношение (10) примет вид

$$\Gamma_1 = L \left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1) - (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0) - (\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0) - \tau_1 g_3 (\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0) \right], \quad (11)$$

$$\Gamma_2 = L \left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_2) - \left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_2 + \mathbf{A}_2 \mathbf{X}_0 + \tau_2 g_3 \mathbf{X}_0 + \mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1 + \tau_1 g_3 \mathbf{X}_1), \mathbf{X}_0 \right] \right]. \quad (12)$$

Учитывая, что точки записания не являются кратными точками дисперсионного множества, покажем, что $\tau_1 = 0$. Для этого учтем свойство оператора \mathbf{A}_1 , которое вытекает из его блочной структуры: $(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0) = 0$ для векторов вида $\mathbf{X}_0 = (X_{01}, X_{02}, 0)^T$ и $\mathbf{X}_0 = (0, 0, X_{03})^T$.

Выразим τ_1 из соотношения (11), полагая $\Gamma_1 = 0$.

$$\tau_1 = L \left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1) - (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0) \right] \left(L [g_3 (\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0)] \right)^{-1}.$$

Можно доказать, что

$$L \left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1) - (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0) \right] = \int_S \left[(\mathbf{B}_0 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1) - (\mathbf{B}_0 \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0) \right] dS = \int_S (\mathbf{B}_1 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0) dS. \quad (13)$$

Для оператора \mathbf{B}_1 (по структуре совпадает с \mathbf{A}_1) также справедливо аналогичное свойство: $(\mathbf{B}_1 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0) = 0$ для векторов вида $\mathbf{X}_0 = (X_{01}, X_{02}, 0)^T$ и $\mathbf{X}_0 = (0, 0, X_{03})^T$.

В частном случае доказано, что $\tau_1 = 0$. Это означает, что дисперсионные ветви пересекают частотную ось под прямым углом ($\kappa^2 = \tau_0 + \tau_2 \gamma^2 + \dots$). Полученный результат согласуется со свойством симметричности дисперсионного множества относительно оси $\gamma = 0$. Руководствуясь этим свойством, можно показать, что все коэффициенты при нечетных степенях в разложении (7) равны нулю ($\tau_1 = \tau_3 = \dots = 0$).

Учитывая, что $\tau_1 = 0$, из соотношения $\Gamma_2 = 0$ получаем

$$\tau_2 = \left(L \left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_2) - (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_0) \right] - L \left[(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0) + (\mathbf{A}_2 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0) \right] \right) \left(L [g_3 (\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0)] \right)^{-1}. \quad (14)$$

Числитель представлен разностью двух интегралов. В первом содержится \mathbf{X}_2 . Выразим его через решения $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1$, вводя соотношение, аналогичное (13):

$$L \left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_2) - (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_0) \right] = \int_S (\mathbf{B}_0 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_2) dS - \int_S (\mathbf{B}_0 \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_0) dS. \quad (15)$$

Так как $\mathbf{B}_0 \mathbf{X}_0|_{S_\sigma} = 0$ и $\mathbf{B}_0 \mathbf{X}_2 = -\mathbf{B}_1 \mathbf{X}_1|_{S_\sigma}$, из (15) получаем

$$L \left[(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_2) - (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_0) \right] = \int_S (\mathbf{B}_1 \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0) dS.$$

Таким образом, формула (14) преобразуется к виду

$$\tau_2 = \left(\int_S (\mathbf{B}_1 \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0) dS - L \left[(\mathbf{A}_1 \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_0) + (\mathbf{A}_2 \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0) \right] \right) \left(L [g_3 (\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0)] \right)^{-1}. \quad (16)$$

Из (16) для двух семейств, порожденных подзадачами 1 и 2 соответственно, получаем

$$\tau_2 = L \left(\begin{array}{l} c_{55} [X_{01}^2 + X_{01}(\partial_1 X_{13})] + c_{44} [X_{02}^2 + X_{02}(\partial_2 X_{13})] \\ - c_{13} [X_{13}(\partial_1 X_{01})] - c_{23} [X_{13}(\partial_2 X_{02})] \end{array} \right) \left(L [g_3 (X_{01}^2 + X_{02}^2)] \right)^{-1}, \quad (17)$$

$$\tau_2 = L \left(\begin{array}{l} c_{55} [X_{11}(\partial_1 X_{03})] + c_{44} [X_{12}(\partial_2 X_{03})] + c_{33} X_{03}^2 \\ - c_{13} [X_{03}(\partial_1 X_{11})] - c_{23} [X_{03}(\partial_2 X_{12})] \end{array} \right) \left(L [g_3 X_{03}^2] \right)^{-1}. \quad (18)$$

На основе формул (17), (18), квадратичной аппроксимации $\kappa^2 = \tau_0 + \tau_2 \gamma^2 + o(\gamma^2)$ и слабой постановки была проведена серия вычислительных экспериментов по построению ветвей дисперсионного множества и их квадратичных аппроксимаций для круглого, квадратного и треугольного поперечных сечений. Квадратичные аппроксимации оказались достаточно близки к «точным» дисперсионным ветвям в диапазоне изменения параметра $\gamma < 0,5$. В ряде экспериментов среди первых 20 дисперсионных ветвей находилась пара ветвей, которые пересекали ось $\gamma = 0$ практически в одной точке (формально не кратной). Зафиксированы случаи, когда расстояние между ними составляло $\Delta\kappa = 0,001$, а также $\Delta\kappa = 0,05$: пара дисперсионных ветвей была близка к квадратичным аппроксимациям лишь при $\gamma < 0,1$.

Проанализированы свойства оператора \mathbf{A}_0 . Доказана его неотрицательность в общем случае и положительная определенность при заземлении части границы в частном.

$$-\int_{\Omega} (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}, \mathbf{X}) d\Omega = L \left[\begin{array}{l} c_{66} [(\partial_2 X_1) + (\partial_1 X_2)]^2 + c_{12} [(\partial_1 X_1) + (\partial_2 X_2)]^2 + c_{55} (\partial_1 X_3)^2 + \\ + c_{44} (\partial_2 X_3)^2 + (c_{11} - c_{12}) (\partial_1 X_1)^2 + (c_{22} - c_{12}) (\partial_2 X_2)^2 \end{array} \right].$$

К изотропному случаю можно перейти, полагая $c_{11} = c_{22} = c_{33} = g_1 + 2g_2$, $c_{12} = c_{13} = c_{23} = g_1$, $c_{44} = c_{55} = c_{66} = g_2$, где g_1, g_2 – безразмерные параметры Ламе.

Покажем положительность для векторов вида $\mathbf{X} = (0, 0, X_3)^T$ (подзадача 2). Общее соотношение преобразуется к виду $-\int_{\Omega} (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}, \mathbf{X}) d\Omega = L [c_{55} (\partial_1 X_3)^2 + c_{44} (\partial_2 X_3)^2] \geq 0$.

В результате получаем, что оператор является положительным в случае наличия заземленной части границы (неотрицательность интеграла обеспечивается неотрицательностью подынтегрального выражения (поскольку $c_{44} > 0, c_{55} > 0$), а условие $\int_{\Omega} (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}, \mathbf{X}) d\Omega = 0$ выполнено только при $\mathbf{X} = 0$ за счет граничных условий). Положительная определенность показана ниже, где использовано неравенство Фридрикса [18]:

$$-\int_{\Omega} (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}, \mathbf{X}) d\Omega \geq c L [(\partial_1 X_3)^2 + (\partial_2 X_3)^2] \geq \frac{c}{d_0^2} L (X_3^2), \quad c = \min \left(\min_{(x,y) \in \Omega} c_{55}, \min_{(x,y) \in \Omega} c_{44} \right).$$

Неотрицательность оператора для подзадачи 1 при заземленной границе (или ее части) трудно доказать, если преобразовать подынтегральное выражение

$$-(\mathbf{A}_0 \mathbf{X}, \mathbf{X}) = c_{66} [(\partial_2 X_1) + (\partial_1 X_2)]^2 + (c_{11} (\partial_1 X_1)^2 + 2c_{12} (\partial_1 X_1) (\partial_2 X_2) + c_{22} (\partial_2 X_2)^2).$$

Первое слагаемое неотрицательно ($c_{66} > 0$) и обращается в нуль при $(\partial_2 X_1) + (\partial_1 X_2) = 0$. Квадратичная форма $c_{11} (\partial_1 X_1)^2 + 2c_{12} (\partial_1 X_1) (\partial_2 X_2) + c_{22} (\partial_2 X_2)^2$ является положительно определенной в силу положительной определенности тензора упругих постоянных ($c_{11} c_{22} - c_{12}^2 > 0$), поэтому обращается в нуль только при $\partial_1 X_{01} = \partial_2 X_{02} = 0$. Таким образом неотрицательность подынтегрального выражения обеспечена. Полагая $\int_{\Omega} (\mathbf{A}_0 \mathbf{X}, \mathbf{X}) d\Omega = 0$, получаем решения, описывающие поворот и движение как твердого целого, но в силу закрепления части границы $\mathbf{X} = 0$.

Отметим, что положительная определенность оператора \mathbf{A}_0 приводит к положительности наименьшего его собственного значения, что соответствует частоте отсечки [6].

Вычислительный эксперимент

Проведена серия вычислительных экспериментов по численному (МКЭ) построению дисперсионных ветвей и их квадратичных приближений. Вычислительный алгоритм на основе слабой постановки и пакета FreeFem++ позволил провести расчеты как для различных форм поперечного сечения, так и для различных законов неоднородности.

Далее приводятся результаты для волновода с треугольным поперечным сечением единичной площади. Основание $a = \sqrt{2}$ жестко заземлено, боковые стороны $b = c = \sqrt{10}/2$ свободны от нагрузок.

На рис. 1 изображены несколько первых ветвей дисперсионного множества для изотропного однородного волновода с треугольным сечением ($g_1 = 1,5$, $g_2 = 1$). Здесь и всюду далее $g_3 = 1$; результаты МКЭ-расчетов обозначены кружочками, квадратичные приближения дисперсионных ветвей – пунктирной линией, если ветвь порождена подзадачей 2, и сплошной, если подзадачей 1. На четвертой ветви (отмечена точка записания) присутствует участок аномальной дисперсии, который проявляется отрицательным значением параметра τ_2 .

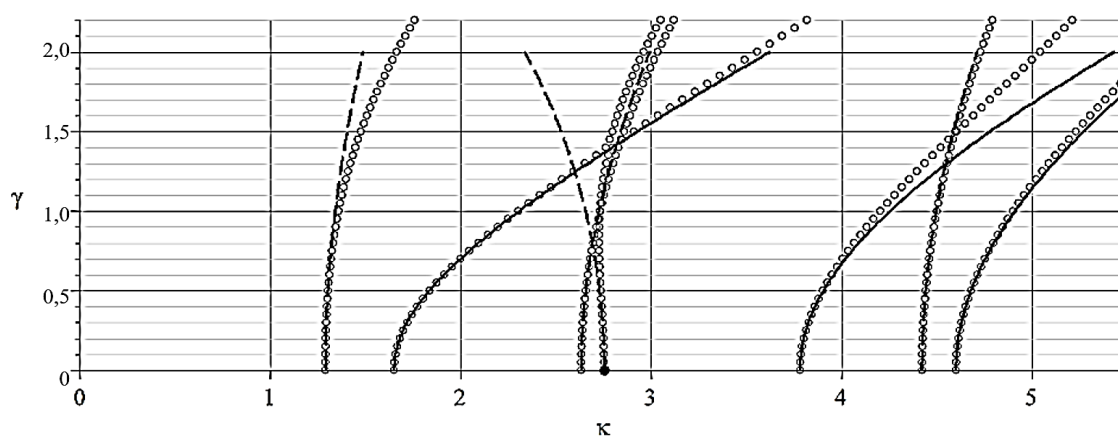


Рис. 1. Изотропный однородный волновод / Fig. 1. Isotropic homogeneous waveguide

Для моделирования неоднородности далее введем функцию неоднородности $E(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$. Пусть $g_1 = 1,5E(x, y)$, $g_2 = E(x, y)$.

На рис. 2 показаны первые несколько ветвей дисперсионного множества для изотропного неоднородного волновода. Четвертая и восьмая ветви проявляют аномальную дисперсию, принадлежат разным семействам. Далее рассмотрим ортотропный волновод из барита [19]. Расчеты осуществлены при следующих безразмерных параметрах: $c_{11} = 7,52$; $c_{22} = 6,67$; $c_{33} = 8,87$; $c_{44} = 1,00$; $c_{55} = 2,38$; $c_{66} = 2,18$; $c_{12} = 4,08$; $c_{13} = 2,30$; $c_{23} = 2,47$.

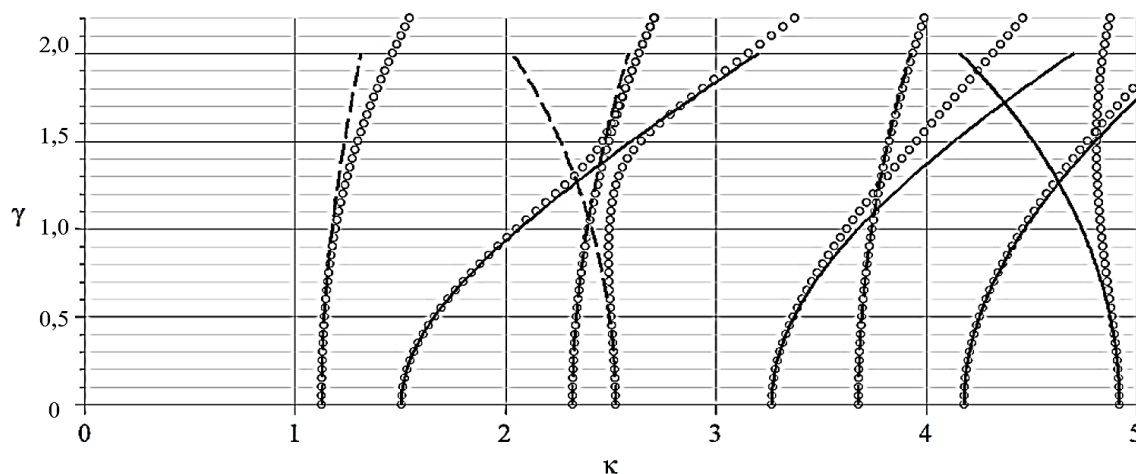


Рис. 2. Изотропный неоднородный волновод / Fig. 2. Isotropic inhomogeneous waveguide

На рис. 3 приведены первые несколько ветвей дисперсионного множества для ортотропного однородного волновода из барита. Третья ветвь дисперсионного множества проявляет аномальную дисперсию. Наблюдается сближение ветвей с номерами 6, 7 и 8.

Умножим каждую компоненту безразмерного тензора упругих модулей на введенную ранее функцию координат $E(x, y)$. Получаем неоднородный ортотропный материал, для которого произведены расчеты.

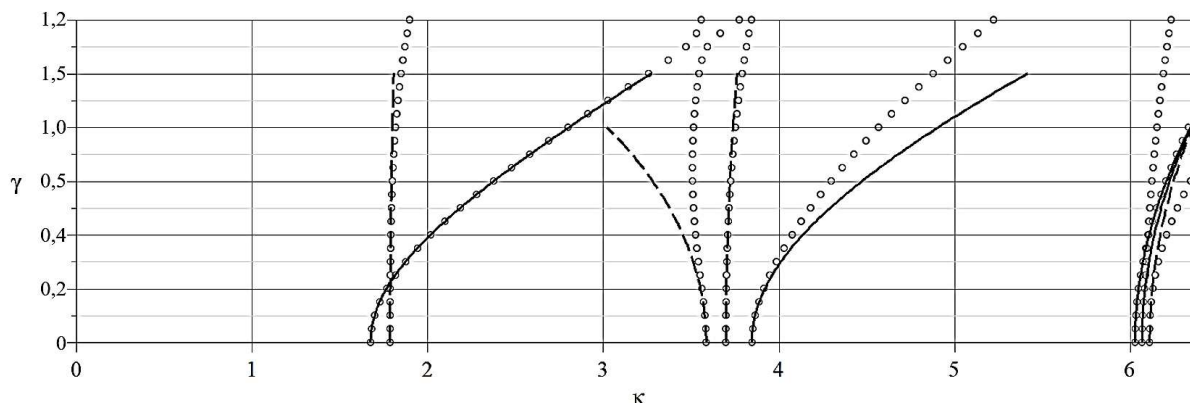


Рис. 3. Ортотропный однородный волновод / Fig. 3. Orthotropic homogeneous waveguide

На рис. 4 построены первые несколько ветвей дисперсионного множества для ортотропного неоднородного волновода. В неоднородном случае по сравнению с однородным наблюдается сближение ветвей 1 и 2, 3 и 4, а среди ветвей 6–8 только 6 и 7 остались сближены. При этом квадратичные аппроксимации хорошо работают лишь в малой окрестности частотной оси, однако позволяют правильно различить участки с нормальной и аномальной дисперсией.

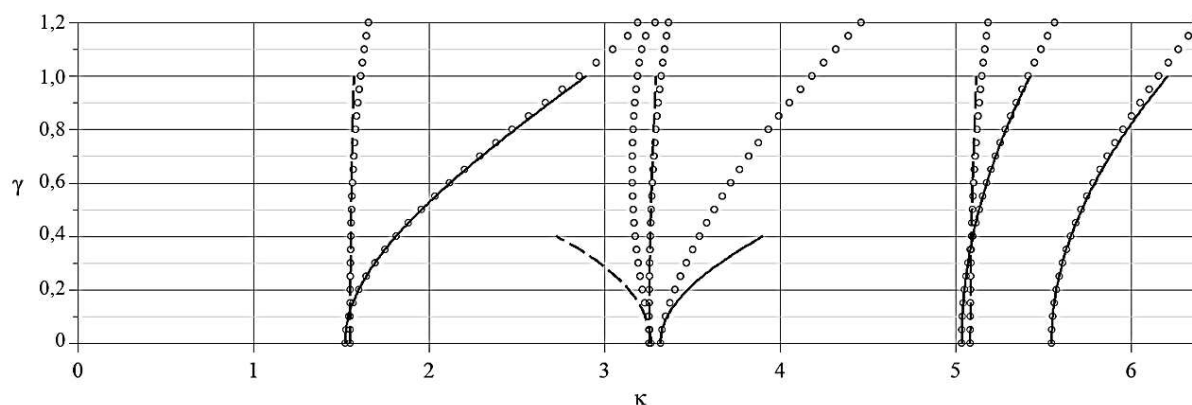


Рис. 4. Ортотропный неоднородный волновод / Fig. 4. Orthotropic inhomogeneous waveguide

Заключение

Отметим, что ветви двух семейств не являются строго чередующимися в рассмотренных случаях. Номер ветви с аномальной дисперсией может быть различным в зависимости от функции неоднородности. Квадратичные асимптотики достаточно хорошо описывают дисперсионные ветви, если частоты записания не являются сильно сближенными.

Список источников

1. Eremin A., Glushkov E.V., Glushkova N.V., Lammering R. Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser Doppler vibrometry // Composite Structures. 2015. Vol. 125. P. 449–458. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.029>

2. Golub M.V., Doroshenko O.V., Arsenov M.A., Eremin A.A., Gu Y., Bareiko I.A. Improved Unsupervised Learning Method for Material-Properties Identification Based on Mode Separation of Ultrasonic Guided Waves // *Computation*. 2022. Vol. 10, № 6. <https://doi.org/10.3390/computation10060093>
3. Ватульян А.О., Юров В.О. Численное и асимптотическое решение задачи о колебаниях неоднородного волновода с кольцевой трещиной конечной ширины // *Акуст. журн.* 2020. Т. 66, № 5. С. 467–474.
4. Глушков Е.В., Глушкова Н.В., Евдокимов А.А. Гибридная численно-аналитическая схема для расчета дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64, № 1. С. 3–12.
5. Гетман И.П., Устинов Ю.А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов н/Д.: Изд-во Рост. ун-та, 1993. 144 с.
6. Ворovich И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
7. Ватульян А.О., Моргунова А.В. Исследование дисперсионных свойств цилиндрических волноводов с переменными свойствами // *Акуст. журн.* 2015. № 3. С. 295–301.
8. Ватульян А.О., Юров В.О. Анализ вынужденных колебаний в функционально-градиентном цилиндрическом волноводе // *Акуст. журн.* 2018. Т. 64, № 6. С. 649–656.
9. Gravenkamp H., Birk C., Van J. Modeling ultrasonic waves in elastic waveguides of arbitrary cross-section embedded in infinite solid medium // *Computers and Structures*. 2015. Vol. 149. P. 61–71. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.11.007>
10. Peng Zuo, Zheng Fan. SAFE-PML approach for modal study of waveguides with arbitrary cross sections immersed in inviscid fluid // *J. of Sound and Vibration*. 2017. Vol. 406. P. 181–196. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.06.001>
11. Mazzotti M., Marzani A., Bartoli I. Dispersion analysis of leaky guided waves in fluid-loaded waveguides of generic shape // *Ultrasonics*. 2014. Vol. 54. P. 408–418.
12. Вильде М.В., Сергеева Н.В. Развитие асимптотических методов анализа дисперсионных соотношений для наследственно-упругого сплошного цилиндра // *Изв. Саратовского ун-та. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика*. 2017. Т. 17, № 2. С. 183–195. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-183-195>
13. Yu J.G., Ratolojanahary F.E., Lefebvre J.E. Guided waves in functionally graded viscoelastic plates // *Composite Structures*. 2011. Vol. 93, № 11. P. 2671–2677. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.06.009>
14. Xiaoming Zhang, Zhi Li, Xianhui Wang, Jiangong Yu. The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. Vol. 89, part 1. P. 299–313. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.077>
15. Зильбергейт А.С., Копилевич Ю.И. Спектральная теория регулярных волноводов. Ленинград: ФТИ, 1983. 302 с.
16. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 416 с.
17. Ватульян А.О., Юров В.О. Исследование дисперсионных свойств неоднородного пьезоэлектрического волновода при наличии затухания // *Акуст. журн.* 2017. Т. 63, № 4. С. 339–348.
18. Ворovich И.И., Лебедев Л.П. Функциональный анализ и его приложения в механике сплошной среды: учеб. пособие. М.: Вузовская книга, 2000. 320 с.
19. Блистанов В.С., Бондаренко В.С., Перемолова Н.В., Стрижевская Ф.И., Чкалова В.В., Шаскольская М.П. Акустические кристаллы: справочник / под ред. М.П. Шаскольской. М.: Наука, 1982. 632 с.

References

1. Eremin A., Glushkov E.V., Glushkova N.V., Lammering R. Evaluation of effective elastic properties of layered composite fiber-reinforced plastic plates by piezoelectrically induced guided waves and laser Doppler vibrometry. *Composite Structures*. 2015;125:449-458. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.02.029>
2. Golub M.V., Doroshenko O.V., Arsenov M.A., Eremin A.A., Gu Y., Bareiko I.A. Improved Unsupervised Learning Method for Material-Properties Identification Based on Mode Separation of Ultrasonic Guided Waves. *Computation*. 2022;10(6). <https://doi.org/10.3390/computation10060093>
3. Vatulyan A.O., Yurov V.O. Numerical and Asymptotic Solution of the Problem of Oscillations of an Inhomogeneous Waveguide with an Annular Crack of Finite Width. *Acoustical Physics*. 2020;66(5):441-448. <https://doi.org/10.1134/S1063771020050140>
4. Glushkov E.V., Glushkova N.V., Evdokimov A.A. Hybrid Numerical-Analytical Scheme for Calculating Elastic Wave Diffraction in Locally Inhomogeneous Waveguides. *Acoustical Physics*. 2018;64(1):1-9. <https://doi.org/10.1134/S1063771018010086>
5. Getman I.P., Ustinov Yu.A. *Mathematical theory of irregular solid waveguides*. Rostov-on-Don: Rostov State University Press; 1993. 144 p. (In Russ.).

6. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains*. Moscow: Nauka Publ.; 1979. 320 p. (In Russ.).
7. Vatulyan A.O., Morgunova A.V. Study of the dispersion properties of cylindrical waveguides with variable properties. *Acoustical Physics*. 2015;61(3):265-271. <https://doi.org/10.1134/S1063771015020141>
8. Vatulyan A.O., Yurov V.O. Analysis of Forced Vibrations in a Functionally Graded Cylindrical Waveguide. *Acoustical Physics*. 2018;64(6):651-658. <https://doi.org/10.1134/S1063771019010147>
9. Gravenkamp H., Birk C., Van J. Modeling ultrasonic waves in elastic waveguides of arbitrary cross-section embedded in infinite solid medium. *Computers and Structures*. 2015;149:61-71. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2014.11.007>
10. Peng Zuo, Zheng Fan. SAFE-PML approach for modal study of waveguides with arbitrary cross sections immersed in inviscid fluid. *Journal of Sound and Vibration*. 2017;406:181-196. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.06.001>
11. Mazzotti M., Marzani A., Bartoli I. Dispersion analysis of leaky guided waves in fluid-loaded waveguides of generic shape. *Ultrasonics*. 2014;54:408-418.
12. Wilde M.V., Sergeeva N.V. Development of Asymptotic Methods for the Analysis of Dispersion Relations for a Viscoelastic Solid Cylinder. *Izv. Saratovskogo un-ta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika = Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*. 2017;17(2):183-195. <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2017-17-2-183-195> (In Russ.).
13. Yu J.G., Ratolojanahary F.E., Lefebvre J.E. Guided waves in functionally graded viscoelastic plates. *Composite Structures*. 2011;93(11):2671-2677. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.06.009>
14. Xiaoming Zhang, Zhi Li, Xianhui Wang, Jiangong Yu. The fractional Kelvin-Voigt model for circumferential guided waves in a viscoelastic FGM hollow cylinder. *Applied Mathematical Modelling*. 2021;89-1:299-313. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.06.077>
15. Zilbergleit A.S., Kopilevich Yu.I. *Spectral Theory of Regular Waveguides*. Leningrad: Institute of Physics and Technology Press; 1983. 302 p. (In Russ.).
16. Lekhnitsky S.G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Moscow: Nauka Publ.; 1977. 416 p. (In Russ.).
17. Vatulyan A.O., Yurov V.O. Dispersion properties of an inhomogeneous piezoelectric waveguide with attenuation. *Acoustical Physics*. 2017;63(4):369-377. <https://doi.org/10.1134/S1063771017040133>
18. Vorovich I.I., Lebedev L.P. *Functional Analysis and Its Applications in Continuum Mechanics*. Study Guide. Moscow: Vuzovskaya Kniga Publ.; 2000. 320 p. (In Russ.).
19. Blistanov V.S., Bondarenko V.S., Peremolova N.V., Strizhevskaya F.I., Chkalova V.V., Shaskolskaya M.P. *Acoustic crystals: Handbook*. Moscow: Nauka Publ.; 1982. 632 p. (In Russ.).

Информация об авторах

А.О. Ватульян – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, ЮФУ; заведующий отделом дифференциальных уравнений, ЮМИ ВНЦ РАН.

В.О. Юров – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, ЮФУ; старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, ЮМИ ВНЦ РАН.

Information about the authors

A.O. Vatulyan - Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department of Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, SFedU; Head of the Department of Differential Equations, SMI VSC RAS.

V.O. Yurov - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Senior Lecturer of the Department of Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, SFedU; Senior Researcher of the Department of Differential Equations, SMI VSC RAS.

*Статья поступила в редакцию 24.07.2024; одобрена после рецензирования 06.08.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 24.07.2024; approved after reviewing 06.08.2024; accepted for publication 16.10.2024.*

Научная статья

УДК 517.9

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-24-30

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОЕКТИВНЫХ И ИНДУКТИВНЫХ ПРЕДЕЛАХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КВАЗИБАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Юлия Викторовна Кораблина

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
ykorablina@sfnu.ru

Аннотация. Сформулированы условия непрерывности классических операторов, действующих между проективными (индуктивными) пределами последовательностей квазибанаховых пространств функций, голоморфных в области комплексной плоскости. Получены абстрактные критерии непрерывности произвольного линейного оператора на проективном (индуктивном) пределе последовательности произвольных квазибанаховых пространств, формулируемые в терминах норм дельта-функций. Указанные результаты применены к оператору весовой композиции и его частным случаям: оператору умножения, его композиции с оператором дифференцирования и оператору обычной композиции. В качестве приложений получены критерии непрерывности упомянутых операторов в конкретных весовых пространствах с интегральными нормами. А именно установлены критерии непрерывности оператора весовой композиции в проективных (индуктивных) пределах последовательностей весовых пространств Бергмана, Дирихле, Харди и Дирихле – Харди (derivative Hardy spaces).

Ключевые слова: весовые пространства голоморфных функций, оператор весовой композиции, проективный (индуктивный) предел последовательности квазибанаховых пространств, пространства Бергмана, пространства Харди

Для цитирования: Кораблина Ю.В. Непрерывность линейных операторов в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазибанаховых пространств голоморфных функций // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 24–30.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

CONTINUITY OF LINEAR OPERATORS IN PROJECTIVE AND INDUCTIVE LIMITS OF SEQUENCES OF QUASI-BANACH SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTION

Yuliya V. Korablina

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
ykorablina@sfnu.ru

Abstract. We establish some conditions under which some classical operators acting between countable projective (inductive) limits of weighted quasi-Banach spaces of functions holomorphic in a plain domain are continuous. It is obtained abstract criteria for the continuity of a linear operator on projective (inductive) limits of an arbitrary sequence of quasi-Banach spaces of holomorphic functions which are stated in terms of delta-functions. The above results are applied to the weighted composition operator (including multiplication and usual composition ones). As a consequence, we obtain criteria of the continuity of the above-mentioned operators on certain weighted spaces with integral norms. Namely, we state some criteria for the continuity of weighted composition operators acting from projective (inductive) limits of weighted Bergman, Hardy, Dirichlet spaces and derivative Hardy spaces.

© Кораблина Ю.В., 2024

Keywords: weighted spaces of holomorphic functions, weighted composition operator, projective (inductive) limits of weighted Banach spaces of holomorphic functions, Bergman spaces, Hardy spaces

For citation: Korablina Yu.V. Continuity of Linear Operators in Projective and Inductive Limits of Sequences of Quasi-Banach Spaces of Holomorphic Function. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):24-30. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Непрерывность различных линейных операторов в весовых пространствах голоморфных функций исследовалась многими авторами. При этом подавляющая часть работ посвящена операторам, действующим из классических банаховых пространств (Харди, Бергмана, Фока и др.) в весовое пространство с sup -нормой [1]. В [2] установлены результаты общего характера для абстрактных операторов, определённых на банаховых пространствах голоморфных в единичном круге функций, подчинённых некоторым естественным ограничениям. В [3, 4] эти результаты обобщены и распространены на квазибанаховы пространства голоморфных функций в произвольных областях комплексной плоскости. Важные для приложений случаи пространств индуктивного и проективного типа рассматривались лишь для конкретных операторов и последовательностей банаховых пространств с sup -нормами [5, 6].

В настоящей работе общие результаты работ [2–4] распространяются на абстрактные операторы в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазибанаховых пространств голоморфных функций. В качестве приложений получен ряд результатов для операторов весовой композиции.

Пусть G – область в комплексной плоскости \mathbb{C} ; $H(G)$ – пространство всех функций, голоморфных в G . По непрерывной функции (весу) $v : G \rightarrow (0, \infty)$ определим банахово пространство

$$H_v(G) := \left\{ f \in H(G) : \|f\|_v = \sup_{z \in G} \frac{|f(z)|}{v(z)} < \infty \right\}.$$

По каждой последовательности $V = (v_n)_{n=1}^\infty$ весов на G , для которой $v_{n+1}(z) \leq v_n(z) + C_n$ на G , естественно определить линейное пространство $HV(G) = \bigcap_n H_{v_n}(G)$ и наделить его топологией проективного предела последовательности банаховых пространств $(H_{v_n}(G))_n$. В двойственном случае таких весовых последовательностей $V = (v_n)_{n=1}^\infty$, что $v_n(z) \leq v_{n+1}(z) + C_n$ на G , естественно образовать $VH(G) = \bigcup_n H_{v_n}(G)$, наделённое топологией внутреннего индуктивного предела последовательности банаховых пространств $(H_{v_n}(G))_n$.

Пусть теперь $(X_n)_{n=1}^\infty$ – последовательность квазибанаховых пространств с квазинормами δ'_z , непрерывно вложенных в $H(G)$, для которых имеет место одно из двух условий:

- 1) X_{n+1} непрерывно вложено в X_n для любого $n \in \mathbb{N}$;
- 2) X_n непрерывно вложено в X_{n+1} для любого $n \in \mathbb{N}$.

В первом случае образуем пространство $X = \bigcap_n X_n$ и наделим его топологией проективного предела. Без ограничения общности считаем, что X плотно в каждом X_n . Во втором – $X = \bigcup_n X_n$

с топологией внутреннего индуктивного предела. Ниже через X_n^* обозначаются сопряженные с X_n пространства линейных непрерывных функционалов на X_n с сопряжённой нормой $\|\cdot\|_n^*$.

Всюду далее $T : H(G) \rightarrow H(G)$ – линейный непрерывный оператор. Наша цель – найти критерии непрерывности такого оператора из X в $HV(G)$ и из X в $VH(G)$. Отметим, что при любом $z \in G$ δ -функция Дирака $\delta_z : f \mapsto f(z)$ и её производная $\delta'_z : f \mapsto f'(z)$ являются ли-

нейными непрерывными функционалами на $H(G)$. Так как T – линейный непрерывный оператор на $H(G)$, то $\delta_z \circ T$ и $\delta'_z \circ T$ также являются линейными непрерывными функционалами на $H(G)$, тем более на всех X_n .

Критерии непрерывности линейных операторов в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазинормируемых пространств голоморфных функций

Сформулируем общие результаты о непрерывности произвольного линейного оператора, действующего из проективных (индуктивных) пределов последовательностей квазибанаховых пространств в аналогичные пространства последовательностей весовых банаховых пространств с sup -нормами.

Теорема 1. Линейный оператор $T : X \rightarrow HV(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|_m^*}{v_n(z)} < \infty. \quad (1)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (1). Из него следует, что $\delta_z \circ T \in X_m^*$ для любого $z \in G$ и имеется такое $C_n > 0$, что $\|\delta_z \circ T\|_m^* \leq C_n \cdot v_n(z)$ при всех $z \in G$. Тогда для всех $x \in X_m$ и $z \in G$ имеем $|(Tx)(z)| \leq C_n \cdot v_n(z) \cdot \|x\|_m$. Как следствие, получаем, что $\|Tx\|_{v_n} \leq C_n \cdot \|x\|_m$, т.е. оператор $T : X_m \rightarrow H_{v_n}(G)$ непрерывен. Следовательно, $T : X \rightarrow H_{v_n}(G)$ непрерывен для каждого $n \in \mathbb{N}$. Значит, $T(X) \subset HV(G)$ и $T : X \rightarrow HV(G)$ непрерывен.

Необходимость. Пусть линейный оператор $T : X \rightarrow HV(G)$ непрерывен. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, что справедливо неравенство

$$\|Tx\|_{v_n} \leq C \cdot \|x\|_m \text{ для всех } x \in X. \quad (2)$$

Рассмотрим произвольное $x \in X_m$. Так как X плотно в X_m , то найдётся последовательность $(x_j)_{j=1}^\infty$ функций из X , которая сходится к x в X_m . Заметим, что тогда $(x_j)_{j=1}^\infty$ фундаментальна в X_m . Отсюда и из неравенства (2) следует, что последовательность $(Tx_j)_{j=1}^\infty$ фундаментальна в $H_{v_n}(G)$. Так как $H_{v_n}(G)$ полно, то $(Tx_j)_{j=1}^\infty$ сходится к некоторому элементу $y \in H_{v_n}(G)$. Остаётся показать, что $y = Tx$. Так как $x_j \rightarrow x$ в X_m и X_m непрерывно вложено в $H(G)$, то тем более $x_j \rightarrow x$ в $H(G)$. Отсюда и из непрерывности $T : H(G) \rightarrow H(G)$ следует, что $Tx_j \rightarrow Tx$ в $H(G)$. Аналогично $Tx_j \rightarrow y$ в $H(G)$. Получаем, что $y = Tx$. Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$ в неравенстве $\|Tx_j\|_{v_n} \leq C \cdot \|x_j\|_m$, получим $\|Tx\|_{v_n} \leq C \cdot \|x\|_m$ для любого $x \in X_m$. Значит, оператор T действует непрерывно из X_m в $H_{v_n}(G)$ и по [3, теорема 1] следует выполнение условия (1).

Установим теперь аналог теоремы 1 для индуктивных пределов последовательностей (квази)банаховых пространств голоморфных функций. Для этого нам потребуется

Лемма. Пусть E и F – внутренние индуктивные пределы последовательностей квазибанаховых пространств $(E_n)_n$ и $(F_n)_n$ соответственно. Линейный оператор $L : E \rightarrow F$ непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такое $m \in \mathbb{N}$, что оператор $L : E_n \rightarrow F_m$ непрерывен.

Известно, что достаточная часть леммы верна для внутренних индуктивных пределов последовательностей $(E_n)_n$ и $(F_n)_n$ любых топологических векторных пространств, а необходимая – при условии, что E_n и F_n – пространства Фреше и, в частности, банаховы пространства [7, с. 206]. Как отмечено в [7], доказательство последней опирается на теорему 6.5.1 из [8], которая верна для класса полных метризуемых топологических векторных пространств. Поскольку всякое квазибанахово пространство относится к указанному классу, доказательство необходимости в лемме проводится точно так же, как и в случае пространств Фреше. Поэтому мы его опускаем.

Теорема 2. Линейный оператор $T : X \rightarrow VH(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in G} \frac{\|\delta_z \circ T\|_n^*}{v_m(z)} < \infty. \quad (3)$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполнено условие (3). Из него следует, что $\delta_z \circ T \in X_n^*$ для любого $z \in G$ и имеется такое $C > 0$, что $\|\delta_z \circ T\|_n^* \leq C \cdot v_m(z)$ при всех $z \in G$. Тогда для всех $x \in X_n$ и $z \in G$ имеем $|(Tx)(z)| \leq C \cdot v_m(z) \cdot \|x\|_n$. Отсюда получаем, что $\|Tx\|_{v_m} \leq C \cdot \|x\|_n$, т.е. оператор $T : X_n \rightarrow H_{v_m}(G)$ непрерывен. Следовательно, оператор $T : X_n \rightarrow VH(G)$ непрерывен. По критерию непрерывности линейного оператора на индуктивном пределе следует, что $T : X \rightarrow VH(G)$ непрерывен.

Необходимость. Пусть линейный оператор $T : X \rightarrow VH(G)$ корректно определён и непрерывен. Из леммы следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что оператор $T : X_n \rightarrow H_{v_m}(G)$ непрерывен. Тогда по [3, теорема 1] выполняется условие (3).

Критерии непрерывности оператора весовой композиции в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазинормируемых пространств голоморфных функций

Применим теоремы 1 и 2 к оператору весовой композиции и его частным случаям.

Обозначим через $S(G)$ семейство тех функций $\varphi \in H(G)$, для которых $\varphi(G) \subset G$. По фиксированным функциям $g \in H(G)$ и $\varphi \in S(G)$ определим оператор весовой композиции $(W_{g,\varphi}f)(z) = g(z) \cdot f(\varphi(z))$, $f \in H(G)$, $z \in G$. Этот оператор действует непрерывно из $H(G)$ в $H(G)$. Положив $T = W_{g,\varphi}$, получим $(\delta_z \circ T)f = g(z) \cdot \delta_{\varphi(z)}f$. Значит, для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $z \in G$

$$\|\delta_z \circ T\|_n^* = \sup_{\|f\|_n \leq 1} |g(z) \cdot \delta_{\varphi(z)}f| = |g(z)| \cdot \sup_{\|f\|_n \leq 1} |\delta_{\varphi(z)}f| = |g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|_n^*.$$

Теорема 3. Пусть $g \in H(G)$, $\varphi \in S(G)$. Оператор весовой композиции $W_{g,\varphi} : X \rightarrow HV(G)$ (или $W_{g,\varphi} : X \rightarrow VH(G)$) корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|_m^*}{v_n(z)} < \infty \quad (\text{или} \quad \sup_{z \in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_{\varphi(z)}\|_n^*}{v_m(z)} < \infty).$$

Заметим, что если $g \in H(G)$ произвольна, а $\varphi(z) \equiv z$ в G , то $W_{g,\varphi}$ превращается в оператор умножения на $g(z)$ и обозначается через M_g , т.е. $M_g : f \mapsto g \cdot f$. Кроме того, его композиция с оператором дифференцирования $D : f \mapsto f'$ определяет оператор $(M_g D f)(z) = g(z) \cdot f'(z)$, для которого $\|\delta_z \circ M_g D\|_n^* = |g(z)| \cdot \|\delta_z'\|_n^*$. Применяя теорему 3 к этим частным случаям, получаем критерии непрерывности.

Следствие 1. Пусть $g \in H(G)$. Оператор $M_g : X \rightarrow HV(G)$ непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z\|_m^*}{v_n(z)} < \infty.$$

Следствие 2. Пусть $g \in H(G)$. Оператор $(M_g D)(f) : X \rightarrow VH(G)$ корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in G} \frac{|g(z)| \cdot \|\delta_z'\|_n^*}{v_m(z)} < \infty.$$

Если $g(z) \equiv 1$ в G , то $W_{g,\varphi}$ является оператором обычной композиции и обозначается через C_φ ; таким образом, $C_\varphi : f \mapsto f(\varphi(z))$.

Следствие 3. Пусть $g \in H(G)$, $\varphi \in S(G)$. Оператор $C_\varphi : X \rightarrow HV(G)$ (или $C_\varphi : X \rightarrow VH(G)$) корректно определён и непрерывен тогда и только тогда, когда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие: $\sup_{z \in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|_m^*}{v_n(z)} < \infty$ (или $\sup_{z \in G} \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|_n^*}{v_m(z)} < \infty$).

Следствие 3 обобщает результаты работ [5, предложение 4.1; 6, предложение 12].

Применение к конкретным пространствам

Для применения результатов предыдущего раздела к весовым пространствам X и X конкретного вида требуется иметь способ для вычисления норм дельта-функций $\|\delta_z\|^*$ и их производных $\|\delta'_z\|^*$ на этих пространствах. В связи с этим отметим, что в статьях [2, 9] были приведены известные результаты о величинах $\|\delta_z\|^*$ и $\|\delta'_z\|^*$ в ряде классических весовых пространств голоморфных в единичном круге функций. Рассматривались пространства Бергмана, Дирихле, Харди, Дирихле – Харди соответственно:

$$A_\alpha^p := \left\{ f \in H(D) : \|f\|^p := \int_D |f(z)|^p \cdot (1-|z|^2)^\alpha dA(z) \right\}, \quad \alpha > -1, \quad 0 < p < \infty,$$

$$D_\alpha^p := \left\{ f \in H(D) : \|f\|^p := |f(0)|^p + \int_D |f'(z)|^p \cdot (1-|z|^2)^\alpha dA(z) \right\}, \quad \alpha > -1, \quad 0 < p < \infty.$$

Здесь и выше $dA(z)$ – нормализованная мера Лебега в D , т.е. $dA(z) = \frac{1}{\pi} d\lambda(z)$; $d\lambda(z)$ – мера Лебега в плоскости,

$$H^p = \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{H^p} = \sup_{0 < r < 1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}} \right\},$$

$$S^p := \left\{ f \in H(D) : \|f\|_{S^p} := |f(0)| + \|f'\|_{H^p} \right\}, \quad 0 < p < \infty.$$

При $p \geq 1$ эти пространства банаховы, а в случае $0 < p < 1$ – квазибанаховы.

Как отмечено в [2, 9], нормы дельта-функции и её производной на указанных пространствах вычисляются по формулам

$$\|\delta_z\|_{A_\alpha^p}^* = (1-|z|^2)^{-\frac{\alpha+2}{p}}, \quad \|\delta_z\|_{H^p}^* = (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}},$$

$$\|\delta_z\|_{D_\alpha^p}^* = \begin{cases} (1-|z|^2)^{-\frac{\alpha+2-p}{p}}, & p < \alpha+2, \\ \left(\log \frac{2}{1-|z|^2} \right)^{-\frac{1-p}{p}}, & p = \alpha+2, \\ 1, & p > \alpha+2, \end{cases} \quad \|\delta_z\|_{S^p}^* = \begin{cases} (1-|z|^2)^{-\frac{1}{p}}, & 0 < p < 1, \\ 1, & 1 \leq p < \infty, \end{cases}$$

$$\|\delta'_z\|_{A_\alpha^p}^* = \|\delta_z\|_{D_\alpha^p}^*; \quad \|\delta'_z\|_{H^p}^* = \|\delta_z\|_{S^p}^*; \quad \|\delta'_z\|_{D_\alpha^p}^* = \|\delta_z\|_{A_\alpha^p}^*; \quad \|\delta'_z\|_{S^p}^* = \|\delta_z\|_{H^p}^*.$$

Образует индуктивные и проективные пределы последовательностей указанных пространств.

Пусть $\gamma \geq 0$. Рассмотрим последовательность $p_n \downarrow \gamma$, т.е. $p_1 > p_2 > \dots > p_n \rightarrow \gamma$, $n \rightarrow \infty$. Тогда при некоторых $C_n \geq 1$ $\|f\|_{H^{p_{n+1}}} \leq C_n \|f\|_{H^{p_n}}$, $\forall f \in H^{p_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

При этом $H^{p_1} \subset H^{p_2} \subset \dots$ и, значит, естественно определить индуктивный предел $H^{\{\gamma\}}(D) = \bigcup_n H^{p_n}(D)$.

Аналогичным образом вводятся индуктивные пределы последовательностей пространств Бергмана, Дирихле и Дирихле – Харди $A^{\{\gamma\}} = \bigcup_n A_\alpha^{p_n}$, $D^{\{\gamma\}} = \bigcup_n D_\alpha^{p_n}$, $S^{\{\gamma\}} = \bigcup_n S^{p_n}$.

Из (5) следует

Предложение 1. Пусть $g \in H(D)$. Справедливы следующие утверждения:

(i) Оператор умножения $M_g : A^{\{\gamma\}} \rightarrow VH(D)$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in D} \frac{(1-|z|)^{\frac{-\alpha+2}{p} \cdot \frac{1}{n}} \cdot |g(z)|}{v_m(z)} < \infty.$$

(ii) Оператор умножения $M_g : D^{\{\gamma\}} \rightarrow VH(D)$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{z \in D} \frac{(1-|z|)^{\frac{-\alpha+2-p}{p} \cdot \frac{1}{n}} \cdot |g(z)|}{v_m(z)} < \infty, p < \alpha + 2, \\ \sup_{z \in D} \frac{|g(z)|}{\left(\log \frac{2}{1-|z|^2} \right)^{\frac{1-p}{p} \cdot \frac{1}{n}} \cdot v_m(z)} < \infty, p = \alpha + 2, \\ \sup_{z \in D} \frac{|g(z)|}{v_m(z)} < \infty, p > \alpha + 2. \end{array} \right.$$

Пусть $0 \leq \gamma \leq \infty$ и $0 < p_n \uparrow \gamma, n \rightarrow \infty$. Тогда при некоторых $C_n \geq 1$ $\|f\|_{H^{p_n}} \leq C_n \|f\|_{H^{p_{n+1}}}$,

$$\forall f \in H^{p_{n+1}}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

При этом $H^{p_1} \supset H^{p_2} \supset \dots$ и, значит, естественно определить проективный предел $H^{(\gamma)} = \bigcap_n H^{p_n}$.

Аналогичным образом вводятся проективные пределы последовательностей пространств Бергмана, Дирихле и Дирихле – Харди $A^{(\gamma)} = \bigcap_n A_\alpha^{p_n}$, $D^{(\gamma)} = \bigcap_n D_\alpha^{p_n}$, $S^{(\gamma)} = \bigcap_n S^{p_n}$.

Из (4) следует

Предложение 2. Пусть $g \in H(G)$. Справедливы следующие утверждения:

(i) Оператор $M_g D : H^{(\gamma)} \rightarrow HV(D)$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{z \in D} \frac{(1-|z|)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{m}} \cdot |g(z)|}{v_n(z)} < \infty, 0 < p < 1, \\ \sup_{z \in D} \frac{|g(z)|}{v_n(z)} < \infty, 1 \leq p < \infty. \end{array} \right.$$

(ii) Оператор $M_g D : S^{(\gamma)} \rightarrow HV(D)$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что выполнено следующее условие:

$$\sup_{z \in D} \frac{(1-|z|)^{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{m}} \cdot |g(z)|}{v_n(z)} < \infty.$$

Список источников

1. Bonet J. Weighted spaces of holomorphic functions and operators between them // *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A*. 2003. Vol. 116. Article 184. 40 p.
2. Zorboska N. Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces // *Integr. Equ. Oper. Theory*. 2017. Vol. 87, № 4. P. 581–600.
3. Абанин А.В., Кораблина Ю.В. Ограниченность классических операторов в весовых пространствах голоморфных функций // *Владикавказский мат. журн.* 2020. Т. 22, № 3. С. 5–17.
4. Абанин А.В., Кораблина Ю.В. Компактность линейных операторов на квазибанаховых пространствах голоморфных функций // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.* 2022. № 4-1. С. 83–89.
5. Bonet J., Friz M. Weakly compact composition operators on locally convex spaces // *Math. Nachr.* 2002. Vol. 245. P. 26–44.
6. Bonet J., Friz M., Jorda E. Composition operators between weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions // *Publ. Math. Debrecen*. 2005. Vol. 67, № 3–4. P. 333–348.
7. Абанин А.В. Ультрадифференцируемые функции и ультрараспределения. М.: Наука, 2007. 222 с.
8. Эдвардс Р. Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир, 1969. 1071 с.
9. Lin Q., Liu J., Wu Y. Order boundedness of weighted composition operators on weighted Dirichlet spaces and derivative Hardy spaces // *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*. 2020. Vol. 27, № 4. P. 627–637.

References

1. Bonet J. Weighted spaces of holomorphic functions and operators between them. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat. Ser. A*. 2003;116:184. 40 p.
2. Zorboska N. Intrinsic operators from holomorphic function spaces to growth spaces. *Integr. Equ. Oper. Theory*. 2017;87(4):581-600.
3. Abanin A.V., Korablina Yu.V. Boundedness of classical operators in weighted spaces of holomorphic functions. *Vladikavkazskii mat. zhurn. = Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2020;22(3):5-17. (In Russ.).
4. Abanin A.V., Korablina Yu.V. Compactness of Linear Operators on Quasi-Banach Spaces of Holomorphic Functions. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2022;(4-1):83-89. (In Russ.).
5. Bonet J., Friz M. Weakly compact composition operators on locally convex spaces. *Math. Nachr.* 2002;245:26-44.
6. Bonet J., Friz M., Jorda E. Composition operators between weighted inductive limits of spaces of holomorphic functions. *Publ. Math. Debrecen*. 2005;67(3-4):333-348.
7. Abanin A.V. *Ultradifferentiable functions and ultradistributions*. Moscow: Nauka Publ.; 2007. 222 p. (In Russ.).
8. Edwards R. *Functional analysis. Theory and applications*. Moscow: Mir Publ.; 1969. 1071 p. (In Russ.).
9. Lin Q., Liu J., Wu Y. Order boundedness of weighted composition operators on weighted Dirichlet spaces and derivative Hardy spaces. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*. 2020;27(4):627-637.

Информация об авторе

Ю.В. Кораблина – аспирант, кафедра математического анализа и геометрии, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Information about the author

Yu.V. Korablina - Postgraduate Student, Department of Mathematical Analysis, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

Статья поступила в редакцию 01.06.2024; одобрена после рецензирования 20.06.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 01.06.2024; approved after reviewing 20.06.2024; accepted for publication 16.10.2024.

Научная статья

УДК 519.6.

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-31-37

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЦЕН ОПЦИОНОВ В МОДЕЛИ ХЕСТОНА С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Олег Евгеньевич Кудрявцев¹, Наталья Викторовна Данилова²

^{1, 2} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^{1, 2} ООО НПФ «ИнВайз Системс», Ростов-на-Дону, Россия

¹ koe@sfnu.ru

² nvdanilova@sfnu.ru

Аннотация. Рассматриваются численные методы вычисления цен опционов в модели Хестона. Основное внимание уделено решению задачи Коши для уравнения с частными производными для цены опциона с помощью искусственных нейросетей. Обоснована возможность аппроксимации решения с помощью нейросетей прямого распространения с одним скрытым слоем и сигмоидной функцией активации. Преимуществом предложенного метода является возможность явного вычисления функции потерь при выборе логистической регрессии в качестве функции активации. Функция потерь нейросети учитывает ошибки выполнения уравнения для цены опциона и аппроксимации начального условия. Для сравнения используется метод решения краевой задачи, метод Монте-Карло и метод, основанный на рекуррентных формулах на бинарном дереве. Вычислительные эксперименты показывают, что даже при умеренном количестве нейронов на скрытом слое нейросеть достаточно хорошо аппроксимирует цены европейского опциона «в деньгах».

Ключевые слова: искусственные нейросети, вычислительная финансовая математика, модель Хестона, опционы, математическое моделирование, численные методы, стохастическая волатильность

Для цитирования: Кудрявцев О.Е., Данилова Н.В. Вычисление цен опционов в модели Хестона с помощью искусственных нейронных сетей // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 31–37.

Благодарности: работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00474, <https://rscf.ru/project/23-21-00474/>).

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

PRICING OPTIONS IN THE HESTON MODEL USING ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

Oleg E. Kudryavtsev¹, Natalia V. Danilova²

^{1, 2} Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

^{1, 2} InWise Systems LLC, Rostov-on-Don, Russia

¹ koe@sfnu.ru

² nvdanilova@sfnu.ru

Abstract. The article considers numerical methods for pricing options in the Heston model. The main attention is paid to solving the Cauchy problem for the partial differential equation for option prices using artificial neural networks. The possibility of approximating the solution using feedforward neural networks with one hidden layer and sigmoid activation function is substantiated. The advantage of the proposed method is the ability to explicitly calculate loss functions when choosing the logistic regression as an activation function. The loss function of neural networks tracks errors in the execution of equations for option prices and approximation of initial conditions. For

© Кудрявцев О.Е., Данилова Н.В., 2024

comparison method of solving the boundary value problem, Monte-Carlo method and method based on recurrent formulas on a binary tree are used. Computational experiments show that even with a moderate number of neurons in the hidden mode, the neural network approximates the prices of European in-the-money options quite well.

Keywords: artificial neural networks, computational financial mathematics, Heston model, options, mathematical modeling, numerical methods, stochastic volatility

For citation: Kudryavtsev O.E., Danilova N.V. Pricing Options in the Heston Model Using Artificial Neural Networks. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):31-37. (In Russ.).

Acknowledgments: this work was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 23-21-00474, <https://rscf.ru/project/23-21-00474/>).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Первые общие модели со стохастической волатильностью, обобщающие геометрическое броуновское движение, появились в конце 80-х гг. XX в. [1]. Рассматривая случайную волатильность, можно объяснить эффект «улыбки волатильности», невозможный в классической модели Блэка – Шоулза. Вместе с тем инфинитезимальный оператор соответствующего процесса становился уже двумерным. В результате базовые задачи в этих моделях, в частности вычисление безарбитражных цен европейских опционов, сводились к численному решению трёхмерного уравнения с частными производными, не имеющего явных формул.

В более поздних работах предлагалось рассматривать модель, в которой базовый актив и волатильность не коррелируют, и использовать осреднение классической формулы Блэка – Шоулза по траекториям волатильности. Однако отсутствие корреляции не позволяет описать важные эффекты асимметрии распределений, наблюдаемые на финансовых рынках.

Основополагающей в практическом и теоретическом плане можно считать работу [2], в которой была построена популярная до сих пор модель Хестона (Heston model). В этой модели цена базового актива S_t коррелирует с мгновенной дисперсией V_t его доходности, которая следует процессу квадратного корня, предложенному в [3].

Рассмотрим стохастический базис $(\Omega, (F_t)_{t \geq 0}, F, \mathbf{P})$. Пространство элементарных случайных событий Ω – пространство непрерывных на отрезке $[0, T]$ траекторий; фильтрация $(F_t)_{t \geq 0}$ наделена набором стандартных свойств; δ -алгебра $F = F_T = \sigma(\cup_{t \in [0, T]} F_t)$. Основным источником случайности принимаем стандартный винеровский процесс, канонически заданный $W_t(\omega) = \omega(t)$, более того, будем считать, что данный процесс определяет стохастический базис в следующем смысле: вероятностная мера P является винеровской, фильтрация $F_t = \sigma(W_s, s \in [0, t] \cup N)$, где N – σ -алгебра, содержащая все множества нулевой меры.

Рассмотрим базовый процесс S со стохастическим дифференциалом

$$dS_t = S_t(\mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dW_t). \quad (1)$$

Тогда он будет принимать положительные значения.

Различные численные методы вычисления цен опционов в модели Хестона разрабатывались многими авторами. В частности, в [4] предложена численная реализация явных формул из [2] для цен европейских опционов в модели Хестона с помощью интегральных преобразований. Метод деревьев для аппроксимации процессов цены базового актива S_t и мгновенной дисперсии V_t использован в [5] для вычисления цен американских опционов. Гибридный метод, применяющий деревья только для аппроксимации процесса мгновенной дисперсии, построен в [6]. Пример применения метода Монте-Карло для оценивания американских опционов можно найти в [7]. В [8] построена методология аппроксимации моделей Леви со стохастической волатильностью с помощью непрерывных марковских цепей, развивающая идеи [9]. На основе указанной методологии в [10] построен численный метод вычисления цен барьерных опционов в модели Хестона.

Последние годы в вычислительной математике активно применяются методы машинного обучения. Согласно знаменитым результатам А.Н. Колмогорова [11], получившим интерпретацию для нейросетей в теореме Г. Цыбенко [12], любая непрерывная функция на компакте в R^n может быть приближена с любой точностью искусственной нейронной сетью прямого распространения с одним скрытым слоем и сигмоидной функцией активации. Теорема Цыбенко и другие универсальные теоремы аппроксимации обосновывают возможность применения нелинейных функций специального вида (искусственных нейросетей) для получения приближенных решений задач финансовой математики.

Целью данной статьи является разработка методики применения нейросетей Цыбенко для решения задач для дифференциальных уравнений с частными производными, возникающих в финансовой математике при вычислении цен опционов в модели Хестона. Существующие подходы к применению нейросетей различной архитектуры для решения дифференциальных уравнений с частными производными рассмотрены в работах [13–15]. Особенностью предлагаемого нами метода является нахождение в явном виде функции потерь путем дифференцирования нелинейной функции, описывающей нейросеть. Такая возможность появляется за счет выбора логистической функции в качестве функции активации. Дополнительно для сравнения в качестве альтернативных численных методов нами разработан метод решения краевой задачи, а также метод Монте-Карло, использующий дискретную аппроксимацию базового процесса и процесса мгновенной дисперсии с помощью бинарных и нормальных случайных величин, и метод на основе рекуррентных формул на бинарном дереве.

Модель Хестона

Пусть параметры базового процесса S в (1), описывающего динамику стоимости рискового актива, $\mu_S(t) = r$, $\sigma_S(t) = \sqrt{V_t}$; r – безрисковая процентная ставка; V_t – процесс вариации (дисперсии). Дифференциал процесса банковского счёта $dB_t = rB_t dt$. Согласно формуле Ито [1], дифференциал дисконтированного процесса стоимости акции имеет вид $d\frac{S_t}{B_t} = \frac{S_t}{B_t} \sqrt{V_t} dW_t$ и является мартингалом относительно исходной меры P . Таким образом, базовый процесс описывается стохастическим дифференциалом $\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sqrt{V_t} dW_t$.

Пусть W и \bar{W} – винеровские процессы с $dW_t d\bar{W}_t = \rho dt$. Предположим, что процесс вариации описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dV_t = k(\theta - V_t)dt + \sigma_V \sqrt{V_t} d\bar{W}_t$, где параметры k – скорость возврата к среднему; θ – долгосрочная вариация; σ_V – волатильность вариации являются положительными константами.

Введём функцию $U(t, S_t, V_t)$, которая выражается через платёжное обязательство $f(S_T)$ согласно формуле $X(t, S_t, V_t) = \exp(-r(T-t)) E(f(S_T)/F_t^{S,V})$. Тогда $X(0, S_0, V_0)$ – справедливая цена опциона европейского стиля с функцией выплат $f(S)$. Из формулы Ито следует уравнение

$$-rU + U_t' + U_S' rS + U_V' k(\theta - V) + \frac{1}{2} U_{SS}'' S^2 V + \frac{1}{2} U_{VV}'' \sigma_V^2 V + U_{SV}'' SV \sigma_V \rho = 0 \quad (2)$$

с конечным условием $U(T, S, V) = f(S)$. В случае опциона call $f(S) = \max(S - K, 0)$.

Перейдем к логарифмической шкале по пространственной переменной и обратному времени: $x = \ln S$, $\tau = T - t$, $u(\tau, x, V) = U(T - \tau, e^x, V)$. Тогда задача Коши для уравнения (2) примет вид при $\tau > 0$, $V > 0$, $x \in \mathbf{R}$:

$$-\tau u - u_\tau' + \left(r - \frac{1}{2}V\right) u_x' + k(\theta - V) u_V' + \frac{1}{2} V u_{xx}'' + \frac{1}{2} \sigma_V^2 V u_{VV}'' + \sigma_V \rho V u_{xV}'' = 0,$$

$$u(0, x, V) = \max(e^x - K, 0).$$

Согласно [1], цена европейского опциона вида call должна удовлетворять граничным условиям:

$$-\tau u(\tau, x, 0) - u_\tau'(\tau, x, 0) + r u_x'(\tau, x, 0) + k \theta u_V'(\tau, x, 0) = 0, \quad (3)$$

$$u(\tau, x, V) = e^x, \quad \tau > 0, V \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

$$u_x'(\tau, x, V) = e^x, \quad x \rightarrow +\infty, \tau > 0, V > 0, \quad (5)$$

$$u(\tau, 0, V) = 0, \quad \tau > 0, V > 0. \quad (6)$$

В соответствии с идеей Хестона [1] представим решение задачи (3)–(6) в виде

$u(\tau, x, V) = e^x P(\tau, x, V) - e^{-r\tau} K Q(\tau, x, V)$, где $P(\tau, x, V)$ и $Q(\tau, x, V)$ являются решением следующих задач Коши:

$$-P'_\tau + \left(r + \frac{1}{2}V\right) P'_x + (k\theta - (k - \sigma_V \rho)V) P'_V + \frac{1}{2}V P''_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_V^2 V P''_{VV} + \sigma_V \rho V P''_{xV} = 0, \quad (7)$$

$$P(0, x, V) = 1_{x \geq \ln K}, \quad (8)$$

$$-Q'_\tau + \left(r - \frac{1}{2}V\right) Q'_x + k(\theta - V) Q'_V + \frac{1}{2}V Q''_{xx} + \frac{1}{2}\sigma_V^2 V Q''_{VV} + \sigma_V \rho V Q''_{xV} = 0, \quad (9)$$

$$Q(0, x, V) = 1_{x \geq \ln K}. \quad (10)$$

Искусственная нейросеть для решения уравнения для цены опциона

Для аппроксимации решения задачи (7), (8) локализуем переменные (τ, x, V) в области $\tau \in (0, T)$, $x \in (x_{\min}, x_{\max})$, $V \in (0, v_{\max})$. Пусть n – количество сгенерированных случайных точек (τ_i, x_i, V_i) , равномерно распределенных в области $\Omega = (0, T) \times (x_{\min}, x_{\max}) \times (0, v_{\max})$.

Приближим решение $P(\tau, x, V)$ задачи (7), (8) нейросетью прямого распространения с тремя входными нейронами, одним скрытым слоем из N нейронов и одним выходным нейроном:

$$\hat{u}(\tau, x, V) = \sum_{j=1}^N w_j s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j), \quad (11)$$

где $s(z) = \frac{e^z}{1+e^z}$ – функция активации; веса w_j , α_j , β_j , γ_j , δ_j – действительные числа, $j = 1, \dots, N$.

Обозначим через L дифференциальный оператор, действующий на функцию $P(\tau, x, V)$ в левой части (7). Функцию потерь $\text{loss}_\Omega(\tau, x, V)$ в точке (τ, x, V) , характеризующую, насколько близко к нулю находится $L\hat{u}(\tau, x, V)$, определим путем явного дифференцирования $\hat{u}(\tau, x, V)$ по переменным τ , x и V

$$\text{loss}_\Omega(\tau_i, x_i, V_i) = (L\hat{u}(\tau_i, x_i, V_i))^2. \quad (12)$$

В частности,

$$\hat{u}'_\tau(\tau, x, V) = \sum_{j=1}^N w_j \beta_j s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j)), \quad (13)$$

$$\hat{u}'_x(\tau, x, V) = \sum_{j=1}^N w_j \alpha_j s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j)), \quad (14)$$

$$\hat{u}'_V(\tau, x, V) = \sum_{j=1}^N w_j \gamma_j s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j)), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}''_{xx}(\tau, x, V) &= \sum_{j=1}^N w_j \alpha_j^2 s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j)) - \\ &- 2 \sum_{j=1}^N w_j \alpha_j^2 s^2(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j)), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}''_{VV}(\tau, x, V) &= \sum_{j=1}^N w_j \gamma_j^2 s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j)) - \\ &- 2 \sum_{j=1}^N w_j \gamma_j^2 s^2(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j)), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}''_{xV}(\tau, x, V) &= \sum_{j=1}^N w_j \gamma_j \alpha_j s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j)) - \\ &- 2 \sum_{j=1}^N w_j \gamma_j \alpha_j s^2(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j) (1 - s(\alpha_j x + \beta_j \tau + \gamma_j V + \delta_j)). \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку теорема Цыбенко сформулирована для непрерывных функций, заменим разрывную функцию в правой части начального условия (8) на гладкую сигмоидную

$$s_0(z) = \frac{e^{1000(z - \ln K)}}{1 + e^{1000(z - \ln K)}}.$$

Для описания точности аппроксимации нейросетью граничного условия (8) сгенерируем n_x случайных точек $(0, y_k, v_k)$, равномерно распределенных в области $\Omega_0 = (x_{\min}, x_{\max}) \times (0, v_{\max})$, и введем соответствующую функцию потерь $\text{loss}_{\Omega_0}(y_i, v_i)$:

$$\text{loss}_{\Omega_0}(y_k, v_k) = (\hat{u}(0, y_k, v_k) - s_0(y_k))^2. \quad (19)$$

На основе (12)–(19) окончательно определяем общую функцию потерь по формуле

$$\text{loss}(\hat{u}; w_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j) = \frac{1}{n} \sum_{(\tau_i, x_i, V_i) \in \Omega} \text{loss}_\Omega(\tau_i, x_i, V_i) + \frac{1}{n_x} \sum_{(y_k, v_k) \in \Omega_0} \text{loss}_{\Omega_0}(y_k, v_k). \quad (20)$$

Обучение нейросети (11) проводим путем минимизации функции $\text{loss}(\hat{u}; w_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$ по параметрам $(w_j, \alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$ методом градиентного спуска. Конструкция нейросети, аппроксимирующей функцию $Q(\tau, x, V)$, которая решает задачу (9), (10), аналогична схеме (11)–(20).

Метод Монте-Карло

В качестве дополнительного построим гибридный метод Монте-Карло. Приведём дискретную модель, аппроксимирующую модель Хестона:

$$\begin{cases} \Delta S_n = S_{n-1}(rh + \sqrt{\sigma V_{n-1}}h\varepsilon_n) \\ \Delta V_n = k(\theta - V_{n-1})h + v\sqrt{V_{n-1}}h\bar{\varepsilon}_n \end{cases}, n = 1, \dots, N. \quad (21)$$

Последовательности $(\varepsilon_n)_{n=1}^N$ и $(\bar{\varepsilon}_n)_{n=1}^N$ состоят из нормально распределённых случайных величин с $E\varepsilon_n = 0, E\bar{\varepsilon}_n = 0, E(\varepsilon_n)^2 = 1, E(\bar{\varepsilon}_n)^2 = 1, cov(\varepsilon_n, \bar{\varepsilon}_n) = \rho$.

Приведём бинарную модель, аппроксимирующую модель (21):

$$\begin{cases} \Delta S_n = S_{n-1}\sqrt{V_{n-1}}hY_n \\ \Delta V_n = v\sqrt{V_{n-1}}h\bar{Y}_n \end{cases}, n = 1, \dots, N. \quad (22)$$

Последовательности $(Y_n)_{n=1}^N$ и $(\bar{Y}_n)_{n=1}^N$ состоят из независимых бинарных случайных величин, принимающих значения 1 и -1, вероятности $p_n = P(Y_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r\sqrt{h}}{\sqrt{V_{n-1}}}\right)$, $\bar{p}_n = P(\bar{Y}_n = 1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k\sqrt{h}(\theta - V_{n-1})}{\sigma v\sqrt{V_{n-1}}}\right)$, $cov(Y_n, \bar{Y}_n) = \rho$.

Справедливая цена опциона $U(0, S_0, V_0)$ также может быть вычислена с помощью метода Монте-Карло. Для дискретной аппроксимации (21) необходимо в каждом эксперименте генерировать случайные величины $\varepsilon_n, \bar{\varepsilon}_n$ согласно следующему правилу: сначала генерируются независимые, стандартные нормальные случайные величины $\delta_n, \bar{\delta}_n$, затем $\varepsilon_n := \delta_n$, $\bar{\varepsilon}_n := \delta_n\rho + \bar{\delta}_n\sqrt{1 - \rho^2}$. Для дискретной аппроксимации (22) необходимо в каждом эксперименте генерировать случайные величины Y_n, \bar{Y}_n согласно следующему правилу: сначала генерируется случайная величина Y_n с вероятностью p_n ; если $Y_n = 1$, то случайная величина \bar{Y}_n генерируется с вероятностью $P(\bar{Y}_n = 1/Y_n = 1) = \frac{\rho}{p_n} + \bar{p}_n$; если $Y_n = -1$, то случайная величина \bar{Y}_n генерируется с вероятностью $P(\bar{Y}_n = 1/Y_n = -1) = \bar{p}_n - \frac{\rho}{1 - p_n}$.

Отметим, что после применения алгоритма редукции справедливая цена опциона $U(0, S_0, V_0)$ также может быть вычислена с помощью стандартных рекуррентных формул на бинарном дереве.

Вычислительные эксперименты

Пример. Пусть $r = 0,05, V_0 = 0,05, S_0 = 8, T = 1, k = 0,05, \theta = 0,05, \sigma_V = 0,05, \rho = 0,05$. Рассчитать значение справедливой цены европейского опциона вида call для $K = 3,4,5,6,7,8$ с помощью решения краевой задачи, нейросетей и метода Монте-Карло ($M = 1000, N = 1000$) в случае модели Хестона. Для расчётов на бинарном дереве параметр $N = 10$. На скрытом слое нейросети мы использовали 60 нейронов, $n = 5000$ и $n_x = 3000$.

В таблице представлены результаты вычислительных экспериментов с помощью различных численных методов, которые приводят к близким результатам. Увеличивая количество нейронов на скрытом слое и количество эпох обучения, можно улучшать точность вычислений с помощью нейросети.

Сравнение численных методов вычисления цены европейского опциона call в модели Хестона / Comparison of numerical methods for calculating the price of a European call option in the Heston model

K	Решение краевой задачи	Метод Монте-Карло, аппроксимация бинарными с.в.	Метод Монте-Карло, аппроксимация нормальными с.в.	Рекуррентные формулы	Нейросеть
3	5,1473	5,1089	5,1639	5,1451	5,2227
4	4,1965	4,2932	4,2349	4,1938	4,2618
5	3,2481	3,2443	3,2752	3,2456	3,2947
6	2,3198	2,3539	2,3916	2,3175	2,3007
7	1,4783	1,5841	1,5263	1,4527	1,4800
8	0,8331	0,8695	0,8749	0,8296	0,9141

В таблице для получения значений справедливой цены во втором столбце применяли метод решения краевой задачи (2) [2], в третьем и четвёртом столбцах – метод Монте-Карло, использующий дискретную (21) и бинарную (22) модели, аппроксимирующие модель Хестона; для получения значений в пятом столбце – рекуррентные формулы на бинарном дереве.

Заключение

В данной статье исследовалась возможность применения нейросетей с достаточно простой архитектурой для решения задачи оценивания опционов в модели Хестона. Приведен пример использования нейросетей для вычисления цен европейских опционов, в котором нелинейная функция, описывающая нейросеть, подставляется в соответствующее уравнение в частных производных. В случае европейских опционов функция потерь контролирует точность аппроксимации начальных условий и выполнения уравнения в частных производных. При решении задачи оценивания барьерных опционов общая конструкция нейросети сохраняется, но добавляется ошибка аппроксимации граничных условий.

Список источников

1. Hull J.C. *Options, futures, and other derivatives*. Prentice Hall, 2012. 432 p.
2. Heston S.L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options // *Review of Financial Studies*. 1993. № 6. P. 327–344.
3. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. A theory of the term structure of interest rates // *Econometrica*. 1985. Vol. 53. P. 385–408.
4. Kahl C., Jackel P. Not-so-complex logarithms in the Heston model // *Wilmott*. 2005. September. URL: <http://www.math.uni-wuppertal.de/~kahl/publications.html> (дата обращения: 10.07.2024).
5. Vellekoop M.H., Nieuwenhuis J.W. A tree-based method to price American options in the Heston model // *J. of Computational Finance*. 2009. Vol 13, № 1. P. 1–21.
6. Briani D.M., Caramellino L., Zanette A. A hybrid approach for the implementation of the Heston model // *IMA J. of Management Mathematics*. 2017. Vol. 4. P. 467–500.
7. Alfonsi A. High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and Heston models // *Mathematics of Computation*. 2010. Vol. 79. P. 209–237.
8. Chourdakis K. Levy Processes Driven by Stochastic Volatility // *Asia-Pacific Finan. Markets*. 2005. Vol. 12. P. 333–352.
9. Kushner H.J. Numerical methods for stochastic control problems in continuous time // *SIAM J. of Control and Optimization*. 1990. Vol. 5. P. 999–1048.
10. Лужецкая П.А., Кудрявцев О.Е. Вычисление цен опционов в моделях со стохастической волатильностью // *Инж. вестн. Дона*. 2020. № 5. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2020/6496> (дата обращения: 10.07.2024).
11. Колмогоров А. Н. О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиций непрерывных функций одного переменного и сложения // *Докл. АН СССР*. 1957. Т. 114, № 5. С. 953–956.
12. Cybenko G. Approximation by superposition of a sigmoidal function // *Mathematics of Control, Signals, and Systems*. 1989. Vol. 2. P. 303–314.
13. Tu S. N. T., Nguyen T. FinNet: A neural network approach to solving partial differential equations // *Neural Networks*. 2022. Vol. 70. P. 50–62.
14. Sirignano J.A., Spiliopoulos K.V. DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations // *J. Comput. Phys*. 2017. Vol. 375. P. 1339–1364.
15. Енифанов А.А. Применение методов глубокого обучения для решения дифференциальных уравнений в частных производных // *Успехи кибернетики*. 2020. Т. 1, № 4. С. 22–28.

References

1. Hull J.C. *Options, futures, and other derivatives*. Prentice Hall; 2012. 432 p.
2. Heston S.L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*. 1993;(6):327-344.
3. Cox J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*. 1985;53:385-408.

4. Kahl C., Jackel P. Not-so-complex logarithms in the Heston model. *Wilmott*. 2005. September. Available from: <http://www.math.uni-wuppertal.de/~kahl/publications.html> [Accessed 10th July 2024].
5. Vellekoop M. H., Nieuwenhuis J. W. A tree-based method to price American options in the Heston model. *Journal of Computational Finance*. 2009;13(1):1-21.
6. Briani D.M., Caramellino L., Zanette A. A hybrid approach for the implementation of the Heston model. *IMA Journal of Management Mathematics*. 2017;4:467-500.
7. Alfonsi A. High order discretization schemes for the CIR process: application to affine term structure and Heston models. *Mathematics of Computation*. 2010;79:209-237.
8. Chourdakis K. Levy Processes Driven by Stochastic Volatility. *Asia-Pacific Finan. Markets*. 2005;12:333-352.
9. Kushner H.J. Numerical methods for stochastic control problems in continuous time. *SIAM Journal of Control and Optimization*. 1990;5:999-1048.
10. Luzhetskaya P.A., Kudryavtsev O.E. Pricing options under stochastic volatility models. *Inzhenernyi vestnik Dona = Don's Engineering Bulletin*. 2020;(5). Available from: URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n5y2020/6496> [Accessed 10th July 2024]. (In Russ.).
11. Kolmogorov A. N. On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition. *Dokl. Akad. nauk SSSR = Reports of the Academy of Sciences of the USSR*. 1957;114(5):953-956. (In Russ.).
12. Cybenko G. Approximation by Superposition of a Sigmoidal Function. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*. 1989;2:303-314.
13. Tu S.N. T., Thu Nguyen. FinNet: A Neural Network Approach to Solving Partial Differential Equations. *Neural Networks*. 2022;70:50-62.
14. Sirignano J.A., Spiliopoulos K.V. DGM: A deep learning algorithm for solving partial differential equations. *J. Comput. Phys*. 2017;375:1339-1364.
15. Epifanov A.A. Deep Learning for Solving Partial Differential Equations. *Uspekhi kibernetiki = Russian Journal of Cybernetics*. 2020;1(4):22-28. (In Russ.).

Информация об авторах

О.Е. Кудрявцев – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры высшей математики и исследования операций, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, ЮФУ; заместитель генерального директора по научной работе, ООО НПФ «ИнВайз Системс».

Н.В. Данилова – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и исследования операций, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, ЮФУ; научный сотрудник, ООО НПФ «ИнВайз Системс».

Information about the authors

O.E. Kudryavtsev – Doctor of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor of the Department of Higher Mathematics and Operations Research, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, SFedU; Research Director, InWise Systems LLC.

N.V. Danilova – Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Operations Research, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, SFedU; Researcher, InWise Systems LLC.

*Статья поступила в редакцию 15.08.2024; одобрена после рецензирования 06.09.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 15.08.2024; approved after reviewing 06.09.2024; accepted for publication 16.10.2024.*

Научная статья

УДК 532.517

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-38-48

ДИАГРАММЫ УСТОЙЧИВОСТИ ПРАВИЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ВИХРЕВЫХ ЗАРЯДОВ ВНЕ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ

Леонид Геннадиевич Куракин¹, Андрей Петрович Мелехов^{2✉},

Ирина Владимировна Островская³

¹Институт водных проблем РАН, Москва, Россия

¹ Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

^{1, 2, 3} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

¹lgkurakin@sfedu.ru

²apmelehov@sfedu.ru ✉

³ivostrovskaya@sfedu.ru

Аннотация. Рассматривается задача устойчивости стационарного вращения системы одинаковых точечных вихревых зарядов, расположенных в вершинах правильного N -угольника вне круговой области в случае произвольной циркуляции Γ обтекания вокруг круга. Потенциал взаимодействия между зарядами обратно пропорционален расстоянию между ними. Работа продолжает исследования статей авторов, где были рассмотрены случаи бесциркулянтного обтекания границы и произвольной циркуляции для логарифмического потенциала взаимодействия между точечными вихрями. В данной статье приведена общая схема исследования устойчивости для произвольного $N \geq 2$, реализованная для $N = 2, 3$. Аналитически и численно исследованы квадратичная часть гамильтониана и собственные значения матрицы линеаризации. Построены диаграммы устойчивости, на которых указаны области орбитальной устойчивости, неустойчивости и области линейной устойчивости, требующие дополнительного нелинейного анализа. Перечислены и исследованы численно все резонансы до четвертого порядка включительно, возникающие в этой задаче. Численно обнаружена неустойчивость на резонансной кривой Γ_{03} , соответствующей двукратному нулевому собственному значению матрицы линеаризации при $N = 3$. Результаты теоретического анализа подтверждаются численным расчетом траекторий вихревых зарядов.

Ключевые слова: точечный вихрь, стационарное вращение, гамильтоновы системы, устойчивость по Раусу, резонанс

Для цитирования: Куракин Л.Г., Мелехов А.П., Островская И.В. Диаграммы устойчивости правильной системы вихревых зарядов вне круговой области в случае произвольной циркуляции // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 38–48.

Благодарности: работа Л. Г. Куракина выполнена в рамках государственного задания ИВП РАН (проект FMWZ-2022-0001). Авторы благодарят рецензента за полезные замечания и рекомендации.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

STABILITY DIAGRAMS OF A REGULAR SYSTEM OF VORTEX CHARGES OUTSIDE THE CIRCULAR REGION IN THE CASE OF ARBITRARY CIRCULATION

Leonid G. Kurakin¹, Andrew P. Melekhov^{2✉}, Irina V. Ostrovskaya³

¹Water Problems Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

¹Southern Mathematical Institute - Branch of Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia - Alania, Russia

^{1, 2, 3}Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

¹lgkurakin@sfnedu.ru

²apmelekhov@sfnedu.ru✉

³ivostrovskaya@sfnedu.ru

Abstract. The problem of the stability of the stationary rotation of a system of identical point vortex charges located at the vertices of a regular N -gon outside a circular region, in the case of arbitrary circulation of Γ around the boundary is considered. The interaction potential between the charges is inversely proportional to the distance between them. In this paper continue their research of the authors' articles, where cases of non-circulant flow around a boundary and arbitrary circulation for the logarithmic potential of interaction between point vortices were considered. This paper presents a general scheme for studying stability for an arbitrary $N \geq 2$, which is implemented for cases $N = 2, 3$. The quadratic part of the Hamiltonian and the eigenvalues of the linearization matrix are investigated analytically and numerically. There are constructed stability diagrams, which indicate the areas of orbital stability, instability, and areas of linear stability that require additional nonlinear analysis. All resonances up to and including the fourth order arising in this problem are listed and investigated numerically. An instability has been numerically detected on the resonance curve Γ_{03} corresponding to the two-fold zero eigenvalue of the linearization matrix at $N = 3$. The results of the theoretical analysis are confirmed by numerical calculation of the trajectories of vortex charges.

Keywords: point vortices, stationary rotation, Hamiltonian systems, Routh stability, resonance

For citation: Kurakin L.G., Melekhov A.P., Ostrovskaya I.V. Stability Diagrams of a Regular System of Vortex Charges Outside the Circular Region in the Case of Arbitrary Circulation. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):38-48. (In Russ.).

Acknowledgments: L.G. Kurakin's work was carried out within the framework of the state assignment of the Water Problems Institute of the Russian Academy of Sciences (project FMWZ-2022-0001). The authors thank the reviewer for useful comments and recommendations.

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Во многих разделах вихревой динамики существенную роль играют модели точечных вихрей, представимые в виде конечномерных гамильтоновых систем. Одним из основных признаков, отличающих эти модели друг от друга, служит потенциал взаимодействия между точечными вихрями. В одной из первых моделей, которая была построена Гельмгольцем, потенциал взаимодействия был пропорционален логарифму $\ln r$, где r – расстояния между вихрями. Эта модель использовалась лордом Кельвином для построения вихревой теории атома. Дж.Дж. Томсон вместо модели Кельвина предложил модель вихревых зарядов [1, 2], которые взаимодействуют между собой по закону $1/r$, и назвал их корпускулами. Хотя вихревая теория атома была отвергнута, тем не менее математические модели нашли свое применение в физике плазмы, геофизической динамике и других разделах вихревой динамики.

В последние годы потенциал $1/r$ встречался, например, в [3, 4], где изучались вихревые заряды в трехмерном пространстве, устойчивость относительного равновесия трех вихревых зарядов с нулевой суммарной интенсивностью.

В недавней работе Рено [5] рассматривался вопрос о сравнении решений различных задач устойчивости в моделях Кельвина и Дж.Дж. Томсона. Среди них была проблема устойчивости томсоновского N -угольника (система одинаковых точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного N -угольника) и N -поля (мультиполя) (правильного томсоновского $(N-1)$ -угольника и вихря произвольной интенсивности, расположенного в центре симметрии).

Устойчивость стационарного вращения правильного N -угольника из одинаковых вихревых зарядов внутри круговой области исследована в [6, 7] для $2 \leq N \leq 6$, в [8] – модель вихревых зарядов вне круга для $2 \leq N \leq 8$ в случае бесциркулянтного обтекания границы, в [9] – влияние циркуляции на устойчивость вращения логарифмических точечных вихрей вне круговой области.

Данная статья является непосредственным продолжением работ [8, 9]. В ней исследуется влияние циркуляции вокруг границы круговой области на устойчивость вращения правильного N -угольника из вихревых зарядов вне круга. Получены общие условия линейной и орбитальной устойчивости, а также условия неустойчивости. Для случаев $N = 2, 3$ построены диаграммы устойчивости на плоскости параметров задачи.

Изложена постановка задачи. Выписаны уравнения движения системы в гамильтоновой форме. Указан вид исследуемого режима. Приведена схема исследования устойчивости стационарного вращения правильного вихревого N -угольника. Выписаны условия линейной и орбитальной устойчивости, а также условия неустойчивости. Проведено исследование устойчивости в случаях $N = 2, 3$, его результаты представлены в виде диаграмм устойчивости на рис. 3, 4. Исследована устойчивость прямым численным счетом при резонансных значениях параметров. Численно проверены также все утверждения об устойчивости и неустойчивости.

Уравнения движения и постановка задачи

Рассматривается модель движения системы N точечных вихревых зарядов единичной интенсивности на плоскости вне круговой области радиуса R

$$\dot{z}_k = 2i \frac{\partial H}{\partial z_k}, \quad \dot{\bar{z}}_k = -2i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_k}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1)$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{1}{|z_k - z_j|} - \frac{1}{4\pi} \sum_{j,k=1}^N \frac{1}{|z_k - \bar{z}_j|} + \frac{\gamma}{4\pi} \sum_{k=1}^N \frac{1}{|z_k|}. \quad (2)$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$ – комплексные переменные, $k = 1, \dots, N$; x_k, y_k – декартовы координаты k -го заряда относительно центра круга; $\bar{z}_k = \frac{R^2}{z_k}$ – отражение k -го заряда границей круга. Параметр γ – циркуляция вокруг круговой границы в отсутствие вихревых зарядов.

Замечание. Будем различать циркуляцию вокруг границы области в отсутствие и в присутствии вихревых зарядов. Циркуляция в присутствии вихревых зарядов Γ есть сумма циркуляции γ и суммарной интенсивности всех отраженных вихрей. В случае N одинаковых вихревых зарядов единичной интенсивности эти параметры связаны следующим соотношением: $\gamma = \Gamma + N$. Случай $\gamma = N$ ($\Gamma = 0$), соответствующий бесциркулянтному обтеканию границы, рассмотрен в работе [8].

Система (1), (2) имеет два интеграла: энергию H и суммарный момент инерции $M = \sum_{k=1}^N |z_k|^2$.

Задача (1), (2) имеет решение

$$z_k = e^{i\omega_N t} u_k, \quad u_k = R_0 e^{2\pi i(k-1)/N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (3)$$

отвечающее стационарному вращению конфигурации одинаковых точечных вихревых зарядов, расположенных вне круговой области радиуса R на окружности радиуса R_0 в вершинах правильного N -угольника, с постоянной угловой скоростью (рис. 1) $\omega = \omega_N(q, \Gamma)$, $q = \frac{R^2}{R_0^2}$, $0 < R < R_0$. Далее, не нарушая общности, можно положить $R_0 = 1$.

В случаях $N = 2, 3$ угловая скорость определяется следующими формулами:

$$\omega_2 = \frac{1}{2}\Gamma + \frac{5q^4 - 22q^2 + 1}{4(q^2 - 1)^2}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\left(\Gamma + \frac{2\sqrt{3} + 9}{3} - \frac{q+1}{(q-1)^2} + \frac{2(q^2-1)}{(q^2+q+1)^{3/2}}\right). \quad (4)$$

При прохождении через кривую $\Gamma = \Gamma_N(q)$ на плоскости параметров (q, Γ) угловая скорость (4) меняет знак (рис. 2): $\Gamma_2 = -\frac{5q^4 - 22q^2 + 1}{2(q^2 - 1)^2}$, $\Gamma_3 = -\frac{2\sqrt{3} + 9}{3} + \frac{q + 1}{(q - 1)^2} - \frac{2(q^2 - 1)}{(q^2 + q + 1)^{3/2}}$.

Далее будем исследовать устойчивость решения (3), (4).

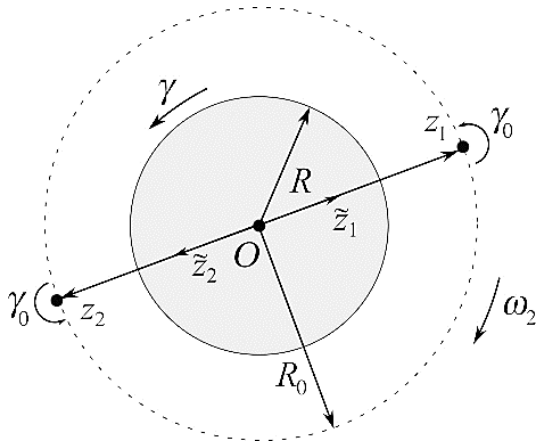


Рис. 1. Вращение системы двух одинаковых вихревых зарядов вокруг круга в случае произвольной циркуляции обтекания γ / Fig. 1. Rotation of a system of two identical vortex charges around a circle in the case of an arbitrary circulation γ

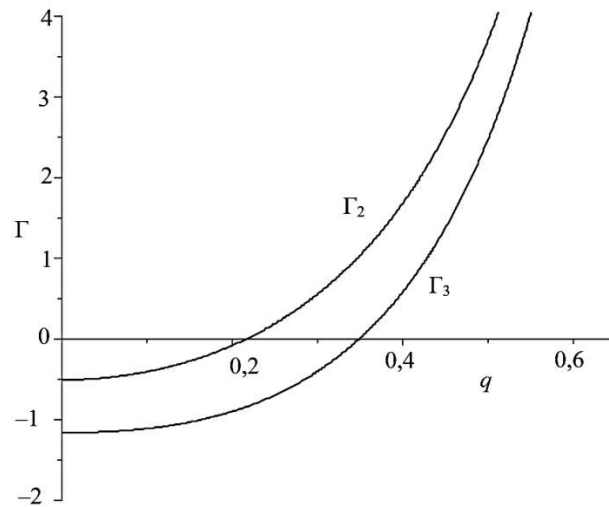


Рис. 2. Графики кривых $\Gamma = \Gamma_N(q)$ при $N=2, 3$, на которых угловая скорость $\omega_N(q, \Gamma_N(q)) = 0$ / Fig. 2. Graphs of curves $\Gamma = \Gamma_N(q)$ for $N=2, 3$ where the angular velocity $\omega_N(q, \Gamma_N(q)) = 0$

Общая схема исследования устойчивости правильного N -угольника

Схема исследования устойчивости режима (3), (4) повторяет аналогичные исследования, проведенные для логарифмических вихрей в [9–13], вихревых зарядов [6–8] и произвольного потенциала [14].

Замена переменных $z_k(t) = e^{i\omega_N t} v_k(t)$, $k = 1, \dots, N$, приводит уравнения (1), (2) к системе уравнений возмущения с гамильтонианом $E(v) = H(v) + \frac{\omega_N}{2} M(v)$, $M = \sum_{k=1}^N |v_k|^2$, где $v = (v_1, \dots, v_N) \in C^N$.

На каждой плоскости переменных v_k введем новые координаты и запишем v_k в виде $v_k = \sqrt{1 + 2r_k} e^{i(\frac{2\pi}{N}(k-1) + \theta_k)}$.

В переменных $r = (r_1, \dots, r_N)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ получаем уравнения возмущений

$$\dot{r}_k = \frac{\partial E}{\partial \theta_k}(v(r, \theta)), \quad \dot{\theta}_k = -\frac{\partial E}{\partial r_k}(v(r, \theta)). \quad (5)$$

Стационарному движению (3), (4) отвечает непрерывное семейство равновесий уравнений возмущения (5), расположенное на прямой $\Pi = \{(r, \theta) \in R^N: r_1 = \dots = r_N = 0, \theta_1 = \dots = \theta_N\}$.

Режим стационарного вращения (3) неустойчив по Ляпунову при любых N [15, 16]. Далее будет использоваться наиболее сильное из возможных в данной задаче определений устойчивости – орбитальная устойчивость [15, 16].

Определение. Орбитальная устойчивость решения (3) означает устойчивость по Ляпунову семейства равновесий Π .

Разложение гамильтониана $E(v(\rho))$ в ряд Тейлора по переменной $\rho = (r, \theta)$ – одно и то же в окрестности любого равновесия семейства Γ : $E(v(\rho)) = E_0 + E_2(v(\rho)) + \dots$, многочликом здесь обозначены слагаемые выше второй степени. Квадратичная форма E_2 представима в виде

$$E_2 = (\mathbf{S}_N \rho, \rho), \quad \mathbf{S}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 & \frac{1}{2} \mathbf{G}_0 \\ -\frac{1}{2} \mathbf{G}_0 & \mathbf{F}_2 \end{pmatrix}.$$

Матрица линеаризации уравнений возмущений (5) на нулевом равновесии имеет вид

$$\mathbf{L}_N = \begin{pmatrix} -\mathbf{G}_0 & 2\mathbf{F}_2 \\ -2\mathbf{F}_1 & -\mathbf{G}_0 \end{pmatrix}.$$

Матрица \mathbf{S}_N симметрична, и поэтому все ее собственные значения вещественны. Она имеет нулевое собственное значение, отвечающее семейству Π . Достаточным условием орбитальной устойчивости решения (3) является то, что у всех остальных собственных значений матрицы \mathbf{S}_N – одинаковый знак. Неустойчивость имеет место, когда у матрицы линеаризации \mathbf{L}_N есть собственные значения с положительной вещественной частью. Если все собственные значения матрицы линеаризации \mathbf{L}_N лежат на мнимой оси, а матрица \mathbf{S}_N знакопеременна, для исследования устойчивости требуется нелинейный анализ с помощью методов КАМ-теории [17].

Матрицы \mathbf{S}_N и \mathbf{L}_N в рассматриваемой нами модели движения вихревых зарядов вне круговой области в случае произвольной циркуляции имеют ту же самую структуру, что и в других моделях [5–8, 10–12, 16, 17].

Матрицы \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{G}_0 являются циркулянтами: $\mathbf{F}_m = \sum_{j=0}^{N-1} f_{mj} C^j$, $\mathbf{G}_0 = \sum_{j=0}^{N-1} g_{0j} C^j$.

$\mathbf{C} = \{c_{ij}\}_{ij=1}^N$ – циклическая матрица, ее ненулевые коэффициенты $c_{N,1} = 1$ и $c_{i,i+1} = 1$, $i = 1, \dots, N-1$. Матрицы \mathbf{F}_1 и \mathbf{F}_2 – симметричные, а \mathbf{G}_0 – кососимметричная.

Величины f_{mk} , g_{0k} , не выписанные здесь ввиду их громоздкости, удовлетворяют условиям

$$f_{mk} = f_{m,N-k}, \quad g_{0k} = -g_{0,N-k}. \quad (6)$$

От циркуляции Γ зависит только коэффициент f_{10} матрицы \mathbf{F}_1 , коэффициенты матриц \mathbf{F}_2 и \mathbf{G}_0 от него не зависят. В случае $N = 2$ матрица $\mathbf{G}_0 = 0$.

Собственные значения λ_{1k} , λ_{2k} и $i\lambda_{0k}$, $k = 1, \dots, N$, матриц \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 и \mathbf{G}_0 соответственно вычисляются по формулам

$$\lambda_{mk} = \sum_{j=0}^{N-1} f_{mj} e^{\frac{2\pi k i j}{N}}, \quad m = 1, 2, \quad i\lambda_{0k} = \sum_{j=0}^{N-1} g_{0j} e^{\frac{2\pi k i j}{N}}. \quad (7)$$

Причем $\lambda_{2N} = 0$, $\lambda_{0N} = 0$, а в случае четных $N \geq 4$ верно неравенство $\lambda_{0\frac{N}{2}} = 0$. Заметим также,

что в силу (6) собственные значения матриц \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 и \mathbf{G}_0 связаны соотношениями

$$\lambda_{mk} = \lambda_{m,N-k}, \quad m = 1, 2, \quad \lambda_{0k} = -\lambda_{0,N-k}.$$

От параметра Γ зависят лишь собственные значения λ_{1k} матрицы \mathbf{F}_1 . Формулы собственных значений λ_{2k} и $i\lambda_{0k}$ матриц \mathbf{F}_2 и \mathbf{G}_0 совпадают с бесциркулянтным случаем [8].

Собственные значения матрицы \mathbf{S}_N являются корнями полинома [10]

$$P(\Lambda, k) = \Lambda^2 - p_{1k}(q, \Gamma)\Lambda + p_{0k}(q, \Gamma), \quad k = 1, \dots, N, \quad (8)$$

$$p_{1k}(q, \Gamma) = \lambda_{1k} + \lambda_{2k}, \quad p_{0k}(q, \Gamma) = \lambda_{1k}\lambda_{2k} - \frac{1}{4}\lambda_{0k}^2.$$

Заметим, что $P(\Lambda, N) = (\Lambda - \lambda_{1k})\Lambda$.

$$\text{В случае четных } N \geq 2 \quad P\left(\Lambda, \frac{N}{2}\right) = \Lambda^2 - \left(\lambda_{1\frac{N}{2}} + \lambda_{2\frac{N}{2}}\right)\Lambda + \lambda_{1\frac{N}{2}}\lambda_{2\frac{N}{2}} = \left(\Lambda - \lambda_{1\frac{N}{2}}\right)\left(\Lambda - \lambda_{2\frac{N}{2}}\right).$$

Собственные значения матрицы линеаризации \mathbf{L}_N имеют вид [10]

$$\sigma_k^\pm = -i\lambda_{0k} \pm 2\sqrt{-\lambda_{1k}\lambda_{2k}}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Поскольку структура матриц \mathbf{S}_N и \mathbf{L}_N оказалась такой же, как и в [9–14], здесь работает теория, развитая в [14] для систем с произвольным гамильтонианом, зависящим от расстояний между точечными вихрями, и справедлива следующая

Теорема. Стационарное вращение (3) правильного вихревого N -угольника:

А. Орбитально устойчиво, если все корни полиномов (8) при $k = 1, \dots, N-1$ имеют один и тот же знак (все они положительны, если

$$p_{0k}(q, \Gamma) = \lambda_{1k}(q, \Gamma)\lambda_{2k}(q) - \frac{1}{4}\lambda_{0k}^2(q) > 0, \quad p_{1k}(q, \Gamma) = \lambda_{1k}(q, \Gamma) + \lambda_{2k}(q) > 0, \quad (10)$$

или отрицательны, если коэффициенты $p_{0k}(q, \Gamma) > 0$ и $p_{1k}(q, \Gamma) < 0$).

В. Неустойчиво, если существуют собственные значения (9) матрицы линеаризации \mathbf{L}_N , лежащие в правой полуплоскости:

$$\lambda_{1k}(q, \Gamma)\lambda_{2k}(q) < 0. \quad (11)$$

С. При нарушении условий (10), (11) для решения задачи устойчивости требуется нелинейный анализ.

В случае выполнения условия С теоремы для заключения об устойчивости необходим нелинейный анализ методами КАМ-теории [14], которые требуют отыскания и исследования всех резонансов с использованием теории нормальных форм. Такая работа для системы логарифмических точечных вихрей вне круга проделана в [8, 11–13], где было исследовано влияние циркуляции во-круг круга на устойчивость.

Диаграммы устойчивости стационарного вращения правильного N -угольника в случае $N = 2, 3$

Результаты проверки условий А – С теоремы для $N = 2, 3$ представлены в виде диаграмм устойчивости на плоскости параметров задачи (q, Γ) на рис. 3, 4.

Случай $N = 2$. Условия теоремы принимают следующий вид: поскольку $\mathbf{G}_0 = 0$, орбитальная устойчивость имеет место, если $\lambda_{11}(q, \Gamma)\lambda_{21}(q) > 0$, второе неравенство $\lambda_{11}(q, \Gamma) + \lambda_{21}(q) > 0$ выполняется автоматически; если $\lambda_{11}(q, \Gamma)\lambda_{21}(q) < 0$, то режим неустойчив; при

$$\lambda_{11}(q, \Gamma)\lambda_{21}(q) = 0 \quad (12)$$

требуется дополнительный нелинейный анализ. Функции $\lambda_{11}(q, \Gamma)$, $\lambda_{21}(q)$ заданы формулами (7), не выписаны здесь ввиду их громоздкости.

Таким образом, плоскость параметров (q, Γ) на рис. 3 делится на области орбитальной устойчивости и неустойчивости. Их границы, на которых имеет место резонанс двукратного нуля (жорданова клетка), заданы условием (12).

Это кривая $\Gamma = \Gamma_{*2}(q)$, определенная равенством $\lambda_{11}(q, \Gamma_{*2}(q)) = 0$, и прямая $q = q_{*2} \approx 0,23607$, такая, что $\lambda_{21}(q_{*2}) = 0$.

Уравнение $\lambda_{21}(q) = 0$ эквивалентно условию $q^2 + 4q - 1 = 0$. Граница $q = q_{*2}$ не зависит от параметра Γ и была найдена в работе [8].

Отметим, что в случае $\Gamma < -\frac{1}{6}$ на интервале $0 < q < q_{*2}$ имеет место неустойчивость, при $q_{*2} < q < 1$ – орбитальная устойчивость.

При $\Gamma > -\frac{1}{6}$ орбитальная устойчивость имеет место на интервалах $0 < q < q_2^*$ и $q_{*2} < q < 1$, а при $q_2^* < q < q_{*2}$ – неустойчивость. Здесь точка (q_2^*, Γ) лежит на кривой $\Gamma = \Gamma_{*2}(q)$.

При $\Gamma \approx 1,69672$ кривая $\Gamma = \Gamma_{*2}(q)$ и прямая $q = q_{*2}$ пересекаются. Экспоненциальная неустойчивость при этом не наблюдается.

На диаграмме также изображена кривая $\Gamma = \Gamma_2(q)$, в точках которой $\omega_2(q, \Gamma_2) = 0$. Отметим, что она проходит через область как неустойчивости, так и орбитальной устойчивости.

Случай $N = 3$. Условия А – С теоремы примут вид:

А. Орбитальная устойчивость имеет место при $\lambda_{11}(q, \Gamma)\lambda_{21}(q) - \frac{1}{4}\lambda_{01}^2(q) > 0$, второе из условий (10) выполняется автоматически.

В. Неустойчивость – в случае $\lambda_{11}(q, \Gamma)\lambda_{21}(q) < 0$.

С. При одновременном нарушении условий А, В требуется нелинейный анализ.

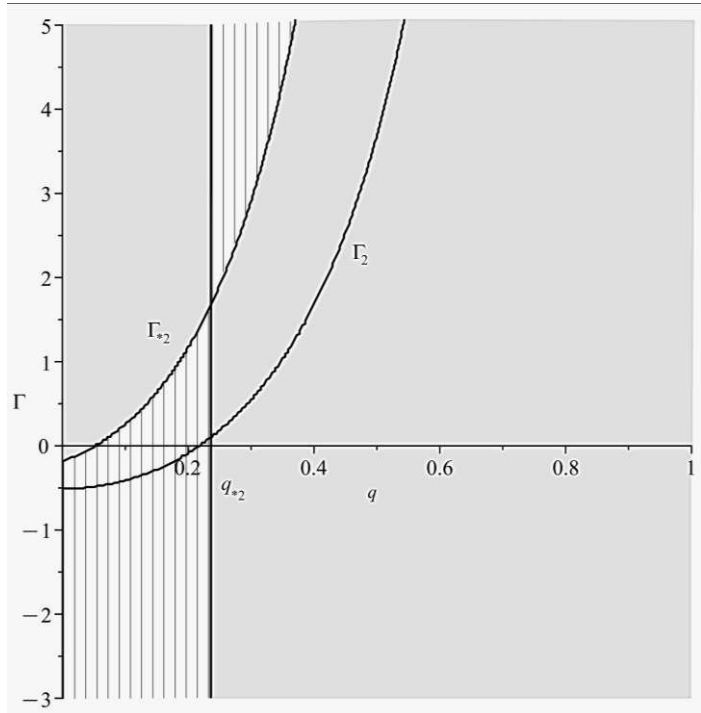


Рис. 3. Диаграмма устойчивости стационарного вращения системы двух вихревых зарядов ($N = 2$): серый цвет – орбитальная устойчивость; штриховка – неустойчивость, на кривой $\Gamma_{*2}(q)$ и прямой $q = q_{*2}$ требуется нелинейный анализ. Кривая $\Gamma_2(q) - \omega_2(q, \Gamma_2) = 0$ / Fig. 3. The stability diagram of stationary rotation of a system of two vortex charges ($N = 2$): gray color - orbital stability; shading - instability; nonlinear analysis is required on the curve $\Gamma_{*2}(q)$ and straight line $q = q_{*2}$. $\Gamma_2(q) - \omega_2(q, \Gamma_2) = 0$

Плоскость параметров (q, Γ) делится на рис. 4 на области орбитальной устойчивости, неустойчивости и линейной устойчивости.

Первая область ограничена кривой $\Gamma = \Gamma_{03}(q)$, заданной уравнением $\lambda_{11}(q, \Gamma)\lambda_{21}(q) - \frac{1}{4}\lambda_{01}^2(q) = 0$. На ней – критический случай двукратного нуля (диагоналируемый случай).

Границы области неустойчивости, на которых имеет место резонанс двукратной пары комплексно-сопряженных собственных значений (жорданова клетка), заданы условием $\lambda_{11}(q, \Gamma)\lambda_{21}(q) = 0$. Это такая кривая $\Gamma = \Gamma_{*3}(q)$, что $\lambda_{11}(q, \Gamma_{*3}(q)) = 0$, и прямая $q = q_{*3} \approx 0,46999$, заданная равенством $\lambda_{21}(q) = 0$.

Значение q_{*3} не зависит от параметра Γ , найдено в [8].

При $\Gamma < -\frac{5}{36}\sqrt{3}$ на интервале $0 < q < q_{*3}$ – неустойчивость, затем сначала появляется область линейной устойчивости $q_3^* < q < q_3^0$, где точка (q_3^0, Γ) лежит на кривой Γ_{03} , и орбитальной устойчивости при $q_3^0 < q < 1$.

В случае $-\frac{5}{36}\sqrt{3} < \Gamma < -\frac{4}{15}\sqrt{3}$ при $0 < q < q_3^*$ и $q_3^* < q < q_3^0$ имеет место линейная устойчивость, при $q > q_3^0$ – орбитальная устойчивость, а на интервале $q_3^* < q < q_{*3}$ – неустойчивость. Здесь точка (q_3^*, Γ) лежит на кривой $\Gamma = \Gamma_{*3}(q)$.

При $\Gamma > -\frac{4}{15}\sqrt{3}$ орбитальная устойчивость – на интервалах $0 < q < q_3^0(\Gamma)$ и при $q > q_3^0$, линейная устойчивость – при $q_3^* < q < q_3^*$ и $q_{*3} < q < q_3^0$, неустойчивость – на интервале $q_3^* < q < q_{*3}$.

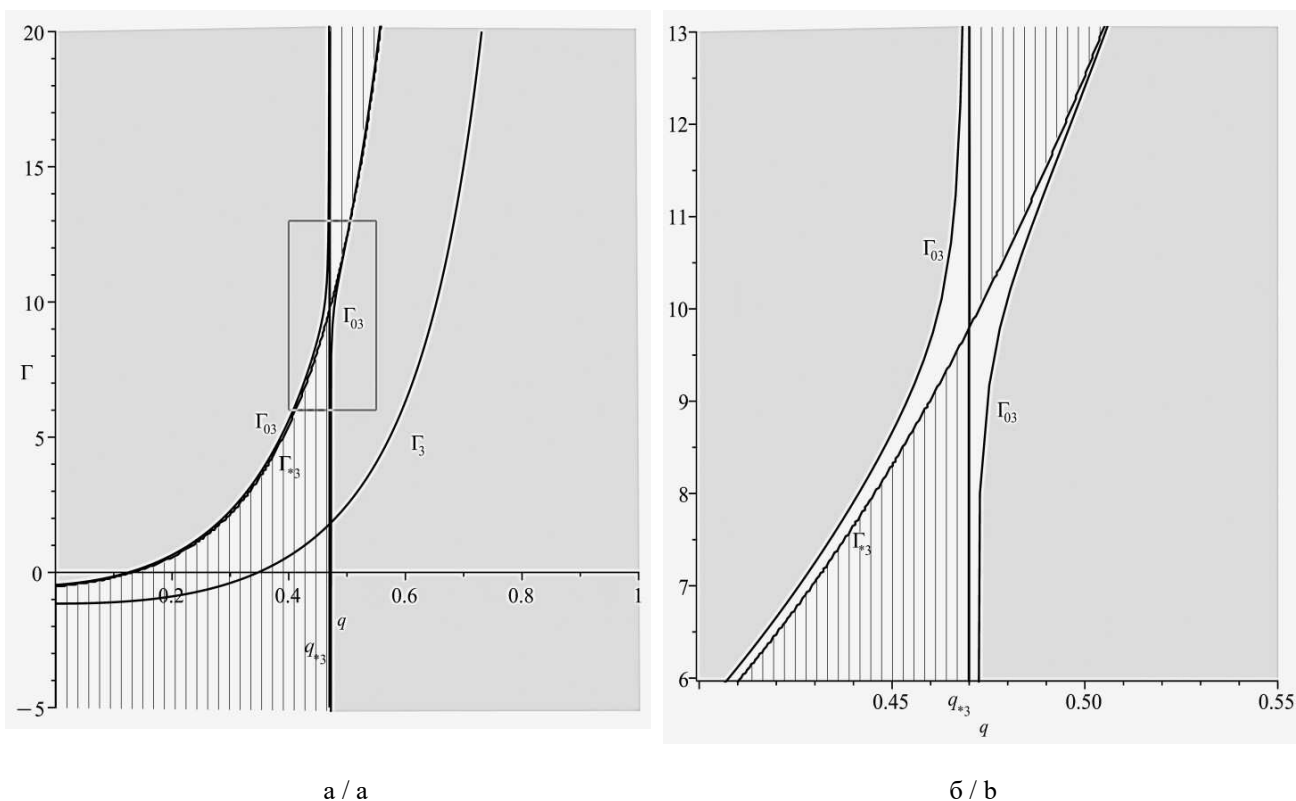


Рис. 4. Диаграмма устойчивости стационарного вращения правильного треугольника ($N = 3$):
 а – $0 < q < 1$, $-5 \leq \Gamma \leq 20$; б – $0,4 < q < 0,55$, $6 \leq \Gamma \leq 13$. Серый цвет – орбитальная устойчивость,
 белый – линейная устойчивость, требующая дополнительный нелинейный анализ; штриховка –
 неустойчивость. На кривой Γ_{03} (резонанс двукратного нуля), кривой Γ_{*3} и прямой $q = q_{*3}$ (резонанс 1:1
 жорданова клетка) требуется нелинейный анализ, $\Gamma_3 - \omega_3(q, \Gamma_3) = 0$ / Fig. 4. The stability diagram
 of stationary rotation of an equilateral triangle ($N = 3$): a - $0 < q < 1$, $-5 \leq \Gamma \leq 20$; b - $0.4 < q < 0.55$,
 $6 \leq \Gamma \leq 13$. Gray color - orbital stability; white color - linear stability, requiring additional nonlinear analysis;
 shading - instability. On the curve Γ_{03} (resonance of double zero), curve Γ_{*3} and straight line $q = q_{*3}$
 (resonance 1:1 Jordan cell) nonlinear analysis is required, $\Gamma_3 - \omega_3(q, \Gamma_3) = 0$

При $\Gamma \approx 9,80823$ кривая $\Gamma = \Gamma_{*3}(q)$ и прямая $q = q_{*3}$, ограничивающие область неустойчивости, пересекаются. Неустойчивость в смысле условия В теоремы в этом случае не наблюдается.

Кроме того, на диаграмме также изображена кривая $\Gamma = \Gamma_3(q)$, в точках которой $\omega_3(q, \Gamma_3(q)) = 0$. Отметим, что она проходит через область как неустойчивости, так и орбитальной устойчивости.

Численный эксперимент в резонансных случаях

В данном разделе прямым численным счетом исследуется устойчивость режима стационарного вращения (3), (4) для $N = 3$ на резонансных кривых (рис. 4).

В случае бесциркулянтного обтекания границы ($\Gamma = 0$) результаты совпадают с работой [8]: обнаружена неустойчивость в точках $q \approx 0,125402$ и $q \approx 0,470580$ на резонансной кривой Γ_{03} .

В случае наличия циркуляции (при $\Gamma \neq 0$) на резонансной кривой Γ_{03} также наблюдается неустойчивость. Примеры траекторий движения вихревых зарядов для параметров на кривой Γ_{03} приведены на рис. 5, 6.

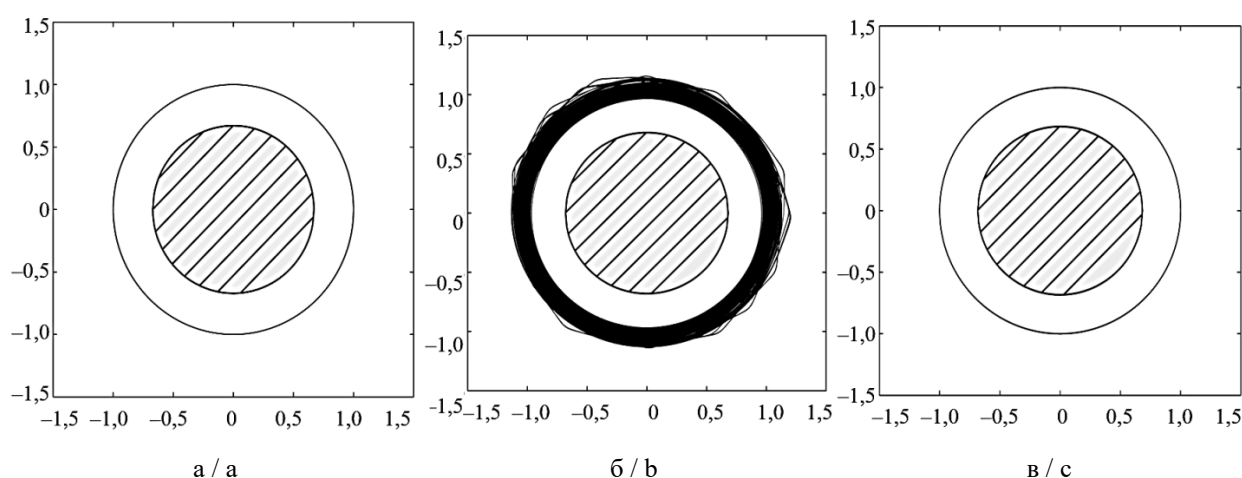


Рис. 5. Случай $N=3$. Неустойчивость на резонансной кривой Γ_{03} (ветки левее прямой $q = q_{*3}$, при $q < q_{*3}$) при $\Gamma = 10$: а - $q = 0,45$; б - $q \approx 0,462247$; в - $q = 0,467$ / Fig. 5. Case $N=3$. Instability on the resonance curve Γ_{03} (branches to the left of the straight line $q = q_{*3}$, with $q < q_{*3}$) when $\Gamma = 10$: а - $q = 0,45$; б - $q \approx 0,462247$; в - $q = 0,467$

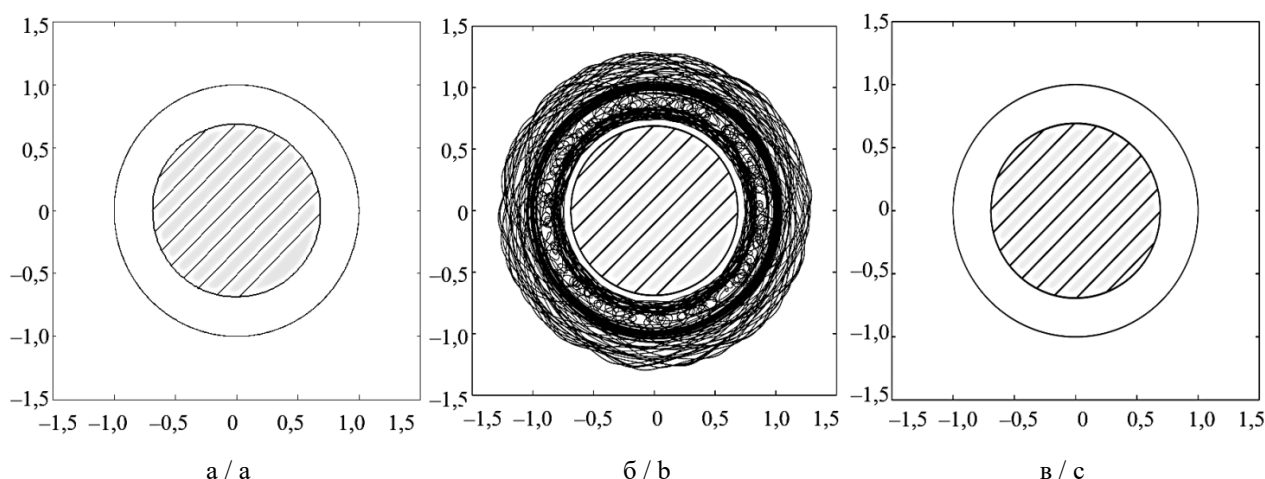


Рис. 6. Случай $N=3$. Неустойчивость на резонансной кривой Γ_{03} (ветки правее прямой $q = q_{*3}$, при $q > q_{*3}$) при $\Gamma = 9$: а - $q = 0,4723$; б - $q \approx 0,474671$; в - $q = 0,48$ / Fig. 6. Case $N=3$. Instability on the resonance curve Γ_{03} (branches to the right of the straight line $q = q_{*3}$, with $q > q_{*3}$) when $\Gamma = 9$: а - $q = 0,4723$; б - $q \approx 0,474671$; в - $q = 0,48$

На рис. 5 демонстрируется неустойчивость стационарного вращения правильного треугольника при $\Gamma = 10$, $q \approx 0,462247$. В начальный момент времени он возмущается на величину порядка 10^{-3} . На рис. 5б наблюдается неустойчивость. Время счета $t = 400$, порядка 250 оборотов режима стационарного вращения (3). При малых отклонениях параметра q от значения на резонансной кривой в обе стороны наблюдается устойчивость (рис. 5а, в). Здесь вихревой треугольник совершает около 6600 оборотов ($t = 10000$).

На рис. 6 показана неустойчивость стационарного вращения правильного треугольника при $\Gamma = 9$, $q \approx 0,474671$.

В начальный момент времени вносится возмущение на величину порядка 10^{-4} . На рис. 6б имеет место неустойчивость. Время счета $t = 800$, порядка 450 оборотов. В малой окрестности точки q наблюдается устойчивость (рис. 6а, в). Здесь время счета – 5600 оборотов ($t = 10\,000$).

Для резонансных кривых Γ_{*3} и q_{*3} труднее судить об устойчивости, основываясь на прямом численном счете, так как с одной стороны от них находятся области неустойчивости, и срыв траектории можно объяснить попаданием в эту область.

Численно проверены также все утверждения об областях устойчивости и неустойчивости в случае $N=2, 3$.

Сделаем необходимые описания используемых в работе численных методов.

Для проведения расчетов использовались встроенные в математический пакет MATLAB метод Дормана – Принса (вариант метода Рунге – Кутты порядка 4, 5) и многошаговый метод Адамса – Башфорта – Моултона для сравнения с первым методом.

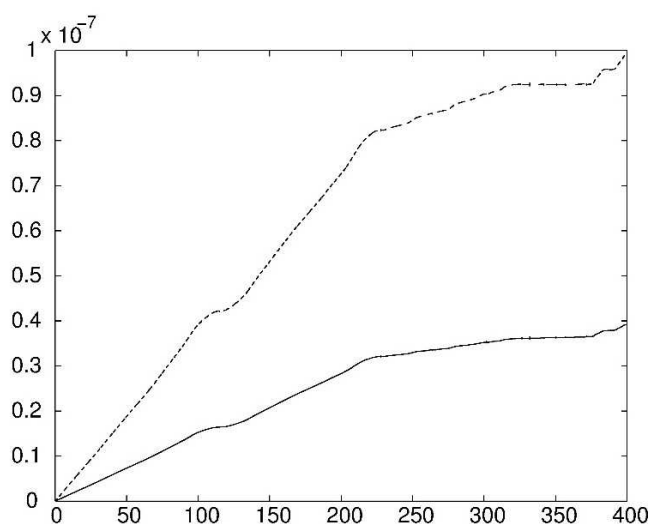


Рис. 7. Случай $N=3$. Динамика относительных погрешностей интегралов H и M , отвечающих рис. 5б: δH – сплошная линия; δM – пунктирная линия / Fig. 7. Case $N=3$. Dynamics of the relative errors of the integrals H and M corresponding to Fig. 5b: δH - solid line; δM - dashed line

Консервативные системы трудны для численного анализа. Стандартный метод контроля корректности вычислений – анализ динамики погрешности интегралов во времени. В работе контролировалось сохранение интегралов системы: энергии H и суммарного момента инерции M . Динамика их относительной погрешности по времени приведена на рис. 7 для случая неустойчивости, соответствующего рис. 5б: $\Gamma = 10$, $q = 0,462247416113899$. Тогда в начальный момент времени $H = 16,125300615495860$ и $M = 3$. Относительная и абсолютная погрешности вычислений в методе Дормана – Принса выбирались 10^{-9} и 10^{-11} соответственно. На рис. 7 видно, что при этом относительная погрешность обоих интегралов за время счета изменяется на величину не больше 10^{-7} .

Корректность наших вычислений, например на рис. 5, также подтверждается тем, что расчет устойчивых и неустойчивого режимов проводился с использованием одинаковых методов и их параметров, указанных выше.

Список источников

1. Томсон Дж.Дж. Электричество и материя. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 264 с.
2. Thomson J.J. On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. 1904. Vol. 7, № 39. P. 237–265.
3. Гряник В.М. Динамика сингулярных геострофических вихрей в двухуровневой модели атмосферы (океана) // Изв. АН СССР. ФАО. 1983. Т. 19, № 3. С. 227–240.
4. Гудименко А.И., Захаренко А.Д. Устойчивость относительного равновесия трех вихревых зарядов с нулевой суммарной интенсивностью // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 4. С. 43–54.

5. Reinaud J.N. Circular Vortex Arrays in Generalised Euler's and Quasi-geostrophic Dynamics // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2022. Vol. 27, № 3. P. 352–368.
6. Островская И.В. Об устойчивости системы частиц в вершинах квадрата внутри круговой области // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*. 2009. Спецвыпуск: Актуальные проблемы математической гидродинамики. С. 178–180.
7. Куракин Л.Г., Мелехов А.П., Островская И.В. Об устойчивости стационарного вращения системы точечных вихрей внутри круговой области // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*. 2015. № 4 (188). С. 68–73.
8. Куракин Л.Г., Мелехов А.П., Островская И.В. Об устойчивости правильной системы вихревых зарядов вне круговой области // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*. 2017. № 4-1(196-1). С. 24–30.
9. Kurakin L., Ostrovskaya I. On the effects of circulation around a circle on the stability of a Thomson vortex N-gon // *Mathematics*. 2020. Vol. 8, № 6. P. 1033. Doi: 10.3390/math8061033.
10. Куракин Л.Г. Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // *Докл. РАН*. 2004. Т. 399, № 1. С. 52–55.
11. Куракин Л.Г. Об устойчивости стационарного вращения системы трех равноудаленных вихрей вне круга // *ПММ*. 2011. Т. 75, № 2. С. 327–337.
12. Куракин Л.Г., Островская И.В. Об устойчивости томсоновского вихревого многоугольника с четным числом вихрей вне круговой области // *СМЖ*. 2010. Т. 51, № 3. С. 584–598.
13. Куракин Л.Г., Островская И.В. Критерий устойчивости правильного вихревого пятиугольника вне круга // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 2. С. 355–368.
14. Kurakin L.G., Lysenko I.A., Ostrovskaya I. V., Sokolovskiy M.A. On Stability of the Thomson's Vortex N-gon in the Geostrophic Model of the Point Vortices in Two-layer Fluid // *J. of Nonlinear Science*. 2019. Vol. 29, № 4. P. 1659–1700. Doi: 10.1007/s00332-018-9526-2.
15. Куракин Л.Г., Юдович В.И. О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // *Докл. РАН*. 2002. Т. 384, № 4. С. 476–482.
16. Kurakin L.G., Yudovich V.I. The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // *Chaos*. 2002. Vol. 12. P. 574–595.
17. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.

References

1. Thomson J. J. *Electricity and matter*. Moscow, Izhevsk: SSRC “Regular and chaotic dynamics” Press; 2004. 264 p. (In Russ.).
2. Thomson J.J. On the structure of the atom: an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle; with application of the results to the theory of atomic structure. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*. 1904;7(39):237-265.
3. Gryanik V.M. Dynamics of singular geophysical vortices in two-level model of atmosphere (ocean). *Izv. AN SSSR. FAO = Proceedings of the Russian Academy of Science. Physics of the Atmosphere and Ocean*. 1983;19(3):227-240. (In Russ.).
4. Gudimenko A.I., Zakharenko A.D. Stability of relative equilibrium of three vortex charges with zero total intensity. *Izv. RAN. MGU = Fluid Dynamics*. 2012;(4):43-54. (In Russ.).
5. Reinaud J.N. Circular Vortex Arrays in Generalised Euler's and Quasi-geostrophic Dynamics. *Regular and Chaotic Dynamics*. 2022;27(3):352-368.
6. Ostrovskaya I.V. On the stability of particle system in the vertices of the square inside the circular area. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. Special issue. Current problems of mathematical hydrodynamics. 2009:178-180. (In Russ.).
7. Kurakin L.G., Melekhov A.P., Ostrovskaya I.V. On the stability of stationary rotation of point vortex system within circular area. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2015;(4):68-73. (In Russ.).
8. Kurakin L.G., Melekhov A.P., Ostrovskaya I.V. On the stability of the correct system of vortex charges outside the circular area. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2017;(4-1):24-30. (In Russ.).
9. Kurakin L., Ostrovskaya I. On the effects of circulation around a circle on the stability of a Thomson vortex N-gon. *Mathematics*. 2020;8(6):1033. Doi: 10.3390/math8061033.
10. Kurakin L.G. Stability, resonance and instability of the right vortex polygons within the circular area. *Dokl. RAN = Reports of the Russian Academy of Sciences*. 2004;399(1):52-55. (In Russ.).
11. Kurakin L.G. On the stability of stationary rotation of the system of three equalateral whirlpools outside the circle. *PMM = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2011;75(2):327-337. (In Russ.).

12. Kurakin L.G., Ostrovskaya I.V. On the stability of Thomson's vortex polygon with even number of vortices outside circular area. *SMZ = Siberian Mathematical Journal*. 2010;51(3):584-598. (In Russ.).
13. Kurakin L.G., Ostrovskaya I.V. The criterion of stability of the correct swirling pentagons outside the circle. *Non-Linear Dynamics*. 2012;8(2):355-368. (In Russ.).
14. Kurakin L.G., Lysenko I.A., Ostrovskaya I. V., Sokolovskiy M.A. On Stability of the Thomson's Vortex N-gon in the Geostrophic Model of the Point Vortices in Two-layer Fluid. *J. of Nonlinear Science*. 2019;29(4):1659-1700. Doi: 10.1007/s00332-018-9526-2.
15. Kurakin L.G., Yudovich V.I. On the non-linear stability of stationary rotation of a correct vortex polygon. *Dokl. RAN = Reports of the Russian Academy of Sciences*. 2002;384(4):476-482. (In Russ.).
16. Kurakin L.G., Yudovich V.I. The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon. *Chaos*. 2002;12:574-595.
17. Markeev A.P. *Points of libration in celestial mechanics and cosmodinamics*. Moscow: Nauka Publ.; 1978. 312 p. (In Russ.).

Информация об авторах

Л.Г. Куракин – доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник, ИВП РАН; ведущий научный сотрудник, ЮМИ ВНИЦ РАН; профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, ЮФУ.

А.П. Мелехов – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического моделирования, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

И.В. Островская – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Information about the authors

L.G. Kurakin - Doctor of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Main Researcher, WPI RAS; Leading Researcher, SMI VSC RAS; Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, SFedU.

A.P. Melekhov - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Mathematical Modeling, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, SFedU.

I.V. Ostrovskaya - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor of the Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, SFedU.

*Статья поступила в редакцию 24.06.2024; одобрена после рецензирования 18.08.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 24.06.2024; approved after reviewing 18.08.2024; accepted for publication 16.10.2024.*

Научная статья

УДК 517.956.4

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-49-59

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ТЬЮРИНГА В СИСТЕМАХ ХИМИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ

Светлана Васильевна Ревина¹, **Ксения Артуровна Келеметова²**

¹ Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

^{1, 2} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

¹ svrevina@srfedu.ru

² kelemetova@srfedu.ru

Аннотация. Цель работы – нахождение области диффузионной неустойчивости на плоскости параметров системы Шнакенберга и брюсселятора, а также для обобщения этих систем. Система Шнакенберга рассматривается в двух случаях: в предположении положительности положения равновесия и в дополнительном (более сильном) предположении положительности параметров системы. Для исследования систем методами теории устойчивости применяется переход к обобщенным переменным, в которых матрицы Якоби указанных систем в окрестности положений равновесия совпадают. Показано, что в первом случае, в отсутствие дополнительных ограничений, области необходимых условий неустойчивости Тьюринга не пусты и не ограничены на плоскости параметров системы. Во втором случае, при более сильных предположениях, область необходимых условий ограничена. Получены условия, при которых область необходимых условий может быть пуста. С помощью перехода к обобщенным переменным получены аналитические выражения границ области достаточных условий при наличии дополнительных предположений, соответствующих положительности параметров для системы Шнакенберга. Рассмотрен случай больших коэффициентов диффузии, когда минимальное критическое волновое число равно единице, а также случаи, при которых минимальное волновое число больше единицы.

Ключевые слова: неустойчивость Тьюринга, системы реакция – диффузия, условия диффузионной неустойчивости, брюсселятор, система Шнакенберга

Для цитирования: Ревина С.В., Келеметова К.А. Линейный анализ неустойчивости Тьюринга в системах химической кинетики // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 49–59.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

LINEAR ANALYSIS OF TURING INSTABILITY IN SYSTEMS OF CHEMICAL KINETICS

Svetlana V. Revina¹, **Kseniya A. Kelemetova²**

¹ Southern Mathematical Institute - Branch of Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia - Alania, Russia

^{1, 2} Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

¹ svrevina@srfedu.ru

² kelemetova@srfedu.ru

Abstract. The goal of the work is to find the region of diffusion instability on the plane of parameters of the Schnakenberg and Brusselator systems, as well as for a system that generalizes these systems. The Schnakenberg system is considered in two cases: under the assumption that the equilibrium position is positive and under the additional (stronger) assumption that the parameters of the system are positive. To study systems using the methods of stability theory, a transition to generalized variables is used, in which the Jacobian matrices of the indicated

© Ревина С.В., Келеметова К.А., 2024

systems in the vicinity of equilibrium positions coincide. It is shown that in the first case, in the absence of additional restrictions, the regions of necessary conditions for Turing instability are not empty and are not limited in the plane of system parameters. In the second case, under stronger assumptions, it is shown that the range of necessary conditions is limited. Conditions have been obtained under which the area of necessary conditions can be empty. Using the transition to generalized variables, analytical expressions for the boundaries of the domain of sufficient conditions are obtained in the presence of additional assumptions corresponding to the positivity of the parameters for the Schnakenberg system. The case of large diffusion coefficients is considered, when the minimum critical wave number is equal to one, as well as cases in which the minimum wave number is greater than one.

Keywords: Turing instability, reaction-diffusion systems, diffusion instability conditions, Brusselator, Schnakenberg system

For citation: Revina S.V., Kelemetova K.A. Linear Analysis of Turing Instability in Systems of Chemical Kinetics. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):49-59. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Пусть задана система двух уравнений реакция – диффузия в m -мерной ограниченной области $\Omega \subset R^m$ при $t > 0$ с краевыми условиями Неймана на границе

$$u_t = \Delta u + f(u, v), \quad v_t = d\Delta v + g(u, v), \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Здесь $d > 0$ – коэффициент диффузии; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}$ – оператор Лапласа; $f(u, v)$, $g(u, v)$ – слагаемые реакции; $u = u(x, t)$, $v = v(x, t)$ – неизвестные функции; $x \in \Omega$, $t > 0$.

Системы вида (1), (2) служат для описания физических, химических, биологических и других процессов. Примеры таких систем, а также общие подходы к их исследованию приведены в классических монографиях [1, 2], экологические модели – в [3].

Бифуркационному поведению пространственно-неоднородных решений, ответвляющихся от положений равновесия, посвящены работы многих авторов. В частности, система Фицхью – Нагумо и ее частный случай – система Рэля с диффузией – исследовались в [4–7].

В настоящей работе рассматриваются две классические модели, относящиеся к типу активатор – ингибитор – система Шнакенберга и брюсселятор.

Модель реакции Белоусова – Жаботинского, известная как брюсселятор, была предложена в [8]. Модели соответствует схема химических реакций: $A \rightarrow U$, $2U + V \rightarrow 3U$, $B + U \rightarrow V + C$, $U \rightarrow R$ в предположении, что продукты реакции C и R немедленно исчезают из реактора. Брюсселятору соответствуют слагаемые реакции:

$$f(u, v) = A - (B + 1)u + u^2v, \quad g(u, v) = Bu - u^2v, \quad (3)$$

а равновесие системы (1)–(3) имеет вид $(u_0, v_0) = \left(A, \frac{B}{A}\right)$.

Система Шнакенберга [9] была предложена в качестве математической модели цепочки химических реакций: $2U + V \rightarrow 3U$, $B \rightarrow V$, $U \rightleftharpoons A$.

Полагая, что $u(x, t)$, $v(x, t)$ – концентрации активатора U и ингибитора V , а концентрации реагентов A и B постоянны и равны a , b , приходим к следующим слагаемым реакции в уравнении (1):

$$f(u, v) = u^2v - u + a, \quad g(u, v) = -u^2v + b. \quad (4)$$

Положение равновесия системы Шнакенберга (1), (2), (4) имеет вид $(u_0, v_0) = \left(a + b, \frac{b}{(a+b)^2}\right)$. Учитывая химический смысл системы, потребуем выполнения условия положительности

$$a + b > 0, \quad b > 0. \quad (5)$$

Система Шнакенберга и брюсселятор изначально рассматривались в качестве моделей химических систем, в которых рождается предельный цикл в результате колебательной потери

устойчивости. В настоящей работе будем интересоваться зарождением стационарных пространственно-неоднородных структур, возникающих при монотонной потере устойчивости пространственно-однородного положения равновесия системы.

Цель настоящей работы – исследование диффузионной неустойчивости положения равновесия (u_0, v_0) для данных моделей, а именно нахождение критического коэффициента диффузии, построение и визуализация области неустойчивости Тьюринга на плоскости параметров системы, определение диапазона критических волновых чисел, при которых возникает диффузионная неустойчивость, а также обобщение этих результатов на более широкий класс систем реакция – диффузия.

Необходимые ограничения на параметры системы при неустойчивости Тьюринга

Дадим основные определения и выведем необходимые условия неустойчивости Тьюринга. Сначала рассмотрим линеаризованную систему (1), (2) в бездиффузионном приближении

$$\frac{dy}{dt} = \mathbf{J}y, \quad y \in \mathbb{R}^2. \quad (6)$$

Здесь $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix} |_{(u_0, v_0)}$ – матрица Якоби линеаризованной в точке (u_0, v_0) нелинейной системы уравнений (1), (2).

Найдем след и определитель матрицы \mathbf{J} и выпишем условия принадлежности спектра устойчивости системы (6) открытой левой полуплоскости:

$$\text{Tr}(\mathbf{J}) = f_u + g_v < 0; \quad \text{Det}(\mathbf{J}) = f_u g_v - f_v g_u > 0. \quad (7)$$

Пусть H – гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{w} = (u, v)$ с компонентами $u, v \in L_2(H)$ и оператор $\mathbf{A}_0: H \rightarrow H$, действующий по правилу $\mathbf{A}_0 = \mathbf{D}\Delta$, определен на множестве вектор-функций $\mathbf{w} = (u, v)$ с компонентами из пространства Соболева $W_2^2(\Omega)$, удовлетворяющими краевым условиям (2), где $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ – матрица.

Тогда линеаризованная на (u_0, v_0) система с диффузией сводится к уравнению в гильбертовом пространстве H

$$\mathbf{w}_t = \mathbf{A}\mathbf{w}; \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{J}. \quad (8)$$

Положение равновесия (u_0, v_0) системы (1), (2) называется неустойчивым по Тьюрингу [10], если выполняются два условия: 1) собственные значения линеаризованной системы в отсутствие диффузии (6) лежат строго в левой полуплоскости; 2) существует собственное значение линеаризованной системы с диффузией (8), которое лежит в правой полуплоскости.

Область на плоскости (a, b) (или (A, B)) параметров системы с диффузией, содержащая такие параметры, для которых имеет место неустойчивость Тьюринга, а коэффициент диффузии d фиксирован, называется областью диффузионной неустойчивости (неустойчивости Тьюринга) [1].

Критическим значением параметра d называется такое d_c , при котором спектр линеаризованной системы с диффузией лежит строго в левой полуплоскости, за исключением одного собственного значения $\lambda(d_c) = 0$, причем пересечение мнимой оси происходит трансверсально: $\lambda'(d_c) \neq 0$ (штрих означает дифференцирование по d).

В [11] область необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга исследована в переменных, предложенных в [12]. Нелинейный анализ бифуркаций, приводящих к рождению тьюринговых структур в однопараметрической системе Гирера – Мейнхардта, проведен в [13].

В настоящей работе применяется замена переменных $(\text{Det}(\mathbf{J}), f_u)$, предложенная в [14] (см. также [15]), позволяющая упростить исследование области неустойчивости Тьюринга для класса систем, подчиняющихся предположениям, сформулированным в [14]. К этому классу систем принадлежат система Шнакенберга и брасселятор.

Визуализация области неустойчивости Тьюринга для брасселятора и системы Шнакенберга проведена в [11, 16, 17].

Для исследования неустойчивости Тьюринга рассмотрим линейную спектральную задачу для оператора \mathbf{A} в H :

$$\mathbf{A}\boldsymbol{\varphi} = \lambda\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\varphi} \neq 0. \quad (9)$$

Определим необходимые условия, при которых существует собственное значение линеаризованной системы с диффузией (8), лежащее в замкнутой правой полуплоскости.

Пусть ψ_k – собственные функции, отвечающие собственным значениям μ_k оператора $-\Delta$ с краевыми условиями Неймана, $k = 0, 1, 2 \dots$

$$\Delta\psi_k + \mu_k\psi_k = 0, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial\psi_k}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0. \quad (10)$$

Будем предполагать, что μ_k (10) являются простыми. В одномерном случае это условие выполняется автоматически; в случае прямоугольного параллелепипеда достаточно предположить несоизмеримость квадратов его сторон.

Разыскивая Φ (9) в виде ряда по собственным функциям оператора Лапласа $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} C_k\psi_k$, $C_k = (C_k^1, C_k^2)$, для любого фиксированного значения k приходим к линейной системе вида $J_k C_k = \lambda_k C_k$, $C_k \neq 0$, где J_k – матрица, соответствующая k -му элементу диагонали матрицы оператора A ; λ_k и C_k – отвечающие ей собственное значение и собственный вектор:

$$J_k = \begin{pmatrix} f_u - \mu_k & f_v \\ g_u & g_v - d\mu_k \end{pmatrix} \Big|_{(u_0, v_0)}. \quad (11)$$

Интересуясь неустойчивостью (u_0, v_0) , найдем след и определитель матрицы J_k :

$$\text{Tr}(J_k) = \text{Tr}(J) - (1 + d)\mu_k,$$

$$\text{Det}(J_k) = d\mu_k^2 - (d \cdot f_u + g_v)\mu_k + \text{Det}(J).$$

Так как $\text{Det}(J) > 0$ (7), то потеря устойчивости может произойти лишь при $k > 0$. В этом случае $\mu_k > 0$. Следовательно, выполняется неравенство $\text{Tr}(J_k) < \text{Tr}(J) < 0$, и положение равновесия (u_0, v_0) может потерять устойчивость, только если $\text{Det}(J_k) = 0$.

Введем обозначение

$$h(\mu) \equiv d\mu^2 - (d \cdot f_u + g_v)\mu + \text{Det}(J). \quad (12)$$

Тогда $h(\mu_k) = \text{Det}(J_k)$, где матрица J_k определена в (11). Необходимыми условиями существования положительного корня квадратного трехчлена $h(\mu)$ (12) является неотрицательность дискриминанта, а также отрицательность второго коэффициента, что соответствует неравенству

$$d \cdot f_u + g_v > 0. \quad (13)$$

Как известно [1], необходимыми условиями неустойчивости Тьюринга являются отрицательность следа, положительность определителя матрицы J , неотрицательность дискриминанта трехчлена $h(\mu)$ с учетом выполнения (13):

$$\text{Tr}(J) \equiv f_u + g_v < 0,$$

$$\text{Det}(J) \equiv f_u g_v - f_v g_u > 0, \quad (14)$$

$$d \cdot f_u + g_v \geq 2\sqrt{d}\sqrt{\text{Det}(J)}.$$

Полученные условия задают область на плоскости параметров (a, b) (или (A, B)), ограниченную кривой нулевого следа $\text{Tr}J = 0$, дискриминантной кривой $D(h) = 0$ и геометрическим местом точек $\text{Det}J = 0$. Будем называть (14) областью необходимых условий неустойчивости Тьюринга.

В совокупности из условия отрицательности следа (7) и условия (13) следуют ограничения на параметры системы, при которых возможна неустойчивость Тьюринга:

$$d \neq 1; \quad f_u \cdot g_v < 0. \quad (15)$$

Для нахождения необходимых условий неустойчивости Тьюринга выпишем элементы матрицы Якоби J для системы Шнакенберга:

$$f_u = \frac{b-a}{a+b}; \quad f_v = (a+b)^2; \quad g_u = -\frac{2b}{a+b}; \quad g_v = -(a+b)^2 \quad (16)$$

и брюсселятора:

$$f_u = B - 1; \quad f_v = A^2; \quad g_u = -B; \quad g_v = -A^2. \quad (17)$$

В обоих случаях $g_v < 0$, поэтому из (15) следует $f_u > 0$. Для системы Шнакенберга (по предположению (5)) это условие выполняется. В случае брюсселятора потребуем выполнения неравенств

$$A > 0, \quad B - 1 > 0. \quad (18)$$

Области необходимых условий неустойчивости Тьюринга для системы Шнакенберга на плоскости (a, b) и брюсселятора на плоскости (A, B) имеют вид

$$\begin{cases} \frac{b-a}{a+b} - (a+b)^2 < 0 \\ d \frac{b-a}{a+b} - (a+b)^2 \geq 2\sqrt{d}(a+b) \end{cases}, \quad (19)$$

$$\begin{cases} (B-1) - A^2 < 0 \\ d(B-1) - A^2 \geq 2\sqrt{d}A \end{cases}. \quad (20)$$

Очевидно, что замена переменных $A = a + b$, $B = \frac{2b}{a+b}$ переводит матрицы Якоби для системы Шнакенберга и брюсселятора (16), (17) друг в друга. Области неустойчивости Тьюринга (19) и (20) для этих двух систем при ограничениях на параметры (5) и (18) качественно одинаковы в переменных (a, b) и (A, B) . Далее будет показано, что ограничение $a > 0$, вытекающее из химического смысла системы Шнакенберга, приводит к качественным различиям областей неустойчивости Тьюринга для данных систем.

В [14] предложена замена переменных, которая позволяет упростить исследование области неустойчивости Тьюринга для класса систем, подчиняющихся определенным предположениям (гипотезам). Упрощение состоит в представлении области неустойчивости Тьюринга в некотором стандартном виде. Пусть выполнено предположение (гипотеза) (H_1) : $f_u > 0$. Тогда автоматически выполняются неравенства $g_v < 0$ и $d > 1$.

Предположим также, что выполняется условие (H_2) : $-g_v$ выражается как монотонно возрастающая гладкая функция от $\text{Det}(\mathbf{J})$ $-g_v = F(\text{Det}(\mathbf{J}))$.

Для системы Шнакенберга и брюсселятора предположения (H_1) и (H_2) выполняются при $F = \text{Det}(\mathbf{J})$. Следуя [14], для описания области необходимых (а затем и достаточных) условий диффузионной неустойчивости применим переменные $(\text{Det}(\mathbf{J}), f_u)$, в которых матрица Якоби для системы Шнакенберга и брюсселятора имеет вид $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} f_u & \text{Det}(\mathbf{J}) \\ -1 - f_u & -\text{Det}(\mathbf{J}) \end{pmatrix} |_{(u_0, v_0)}$.

Тогда область необходимых условий диффузионной неустойчивости [14, 15] задается неравенствами:

$$\text{Det}(\mathbf{J}) > 0, \quad \frac{1}{d} \text{Det}(\mathbf{J}) + \frac{2}{\sqrt{d}} \sqrt{\text{Det}(\mathbf{J})} \leq f_u < \text{Det}(\mathbf{J}), \quad (21)$$

ограничена кривой нулевого следа

$$f_u = \text{Det}(\mathbf{J}) \quad (22)$$

и дискриминантной кривой

$$(f_u)_0 = \frac{1}{d} \text{Det}(\mathbf{J}) + \frac{2}{\sqrt{d}} \sqrt{\text{Det}(\mathbf{J})}. \quad (23)$$

Найдем точку пересечения кривых (22) и (23):

$$\text{Det}(\mathbf{J}) = \frac{4d}{(d-1)^2}, \quad f_u = \frac{4d}{(d-1)^2}. \quad (24)$$

Ограничение $a > 0$ для системы Шнакенберга в обобщенных переменных приводит к неравенству $f_u < 1$. Для того чтобы область необходимых условий была пуста, необходимо и достаточно выполнение неравенства $f_u \geq 1$, где f_u определено в (24). Элементарными выкладками доказывается

Утверждение. При $d > 1$, в отсутствие других ограничений, область необходимых условий неустойчивости Тьюринга (21) не пуста. Если дополнительно предположить, что $f_u < 1$, то она пуста, когда коэффициент диффузии подчиняется неравенству $1 < d \leq (1 + \sqrt{2})^2$, и не пуста при $d > (1 + \sqrt{2})^2$.

Заметим, что похожее ограничение на коэффициент диффузии $d \geq (1 + \sqrt{2})^2$ возникает при нахождении области неустойчивости Тьюринга в однопараметрической системе Гирера – Мейнхардта [13], так как для этой системы выполняется равенство $f_u = 1$.

Достаточные условия неустойчивости Тьюринга

Выразив f_u из $h(\mu_k)$ (12) через $\text{Det} \mathbf{J}$, для фиксированных k получим семейство кривых, называемых кривыми достаточных условий. Для системы Шнакенберга и брюсселятора они имеют вид

$$(f_u)_k(\text{Det} \mathbf{J}) = \mu_k + \frac{\mu_k + 1}{d\mu_k} \text{Det} \mathbf{J}. \quad (25)$$

В [11, 14, 15] показано, что для $\text{Det}\mathbf{J} > 0$ соседние кривые $(f_u)_k(\text{Det}\mathbf{J})$ и $(f_u)_{k+1}(\text{Det}\mathbf{J})$ имеют единственную точку пересечения, абсцисса и ордината которой находятся по формулам:

$$(\text{Det}\mathbf{J})_{k,k+1} = d\mu_k\mu_{k+1}; \quad (f_u)_{k,k+1} = \gamma_k, \quad \gamma_k = \mu_k\mu_{k+1} + \mu_k + \mu_{k+1}. \quad (26)$$

Подчеркнем, что комбинация собственных значений оператора Лапласа γ_k (26) служит для описания области неустойчивости Тьюринга не только для систем реакция – диффузия, подчиняющихся условиям (H_1) и (H_2) , но и для других систем, например системы Гирера – Мейнхардта [13].

Случай больших коэффициентов диффузии

Пусть значение d удовлетворяет условию

$$d > 1 + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}. \quad (27)$$

Для аналитического задания области неустойчивости Тьюринга введём обозначение для объединения кривых достаточных условий (25) при $k \geq 1$:

$$Z_1(\text{Det}\mathbf{J}) = \bigcup_{k \geq 1} \{(f_u)_k(\text{Det}\mathbf{J}), \text{Det}\mathbf{J} \in [(\text{Det}\mathbf{J})_{k-1,k}; (\text{Det}\mathbf{J})_{k,k+1}]\}. \quad (28)$$

Множество $Z_1(\text{Det}\mathbf{J})$ (28) является наряду с кривой нулевого следа границей области достаточных условий неустойчивости Тьюринга.

В качестве значения $(\text{Det}\mathbf{J})_{0,1}$ выступает абсцисса точки пересечения кривой $(f_u)_m$ (25) с кривой нулевого следа при $m = 1$:

$$(\text{Det}\mathbf{J})_{0,m} = \frac{d\mu_m^2}{\mu_m(d-1)+1} = (f_u)_{0,m}. \quad (29)$$

Тогда область необходимых и достаточных условий для брюсселятора и системы Шнакенберга (без учета предположения $f_u < 1$) в переменных $(\text{Det}\mathbf{J}, f_u)$ имеет вид $f_u < \text{Det}\mathbf{J}$, $\text{Det}\mathbf{J} > 0$; $f_u \geq Z_1(\text{Det}\mathbf{J})$.

Теперь учтем ограничение $f_u < 1$, равносильное предположению $a > 1$ для системы Шнакенберга. Получим, что область достаточных условий пуста тогда и только тогда, когда $(f_u)_{0,1} \geq 1$, где f_u берется из (29) при $m = 1$. Переход к обобщенным переменным позволяет дать наглядное геометрическое описание области необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга.

Пусть X_m – абсцисса точки пересечения кривой достаточных условий $(f_u)_m$ (25) и прямой $f_u = 1$:

$$X_m = \frac{1-\mu_m}{1+\mu_m} d\mu_m. \quad (30)$$

Через $T_m(1)$ обозначим контур треугольника, ограниченного кривыми (25), (23) и прямой $f_u = 1$:

$$\begin{aligned} f_u &= \mu_m + \frac{\mu_m+1}{d\mu_m} \text{Det}\mathbf{J}, \quad \text{Det}\mathbf{J} \in [(\text{Det}\mathbf{J})_{0,m}, X_m], \\ f_u &= \text{Det}\mathbf{J}, \quad \text{Det}\mathbf{J} \in [(\text{Det}\mathbf{J})_{0,m}, 1], \\ f_u &= 1, \quad \text{Det}\mathbf{J} \in [1, X_m]. \end{aligned} \quad (31)$$

Через $T_m(\gamma_m)$ обозначим контур треугольника, который отличается от $T_m(1)$ тем, что вместо прямой $f_u = 1$ он ограничен прямой $f_u = \gamma_m$:

$$\begin{aligned} f_u &= \mu_m + \frac{\mu_m+1}{d\mu_m} \text{Det}\mathbf{J}, \quad \text{Det}\mathbf{J} \in [(\text{Det}\mathbf{J})_{0,m}, (\text{Det}\mathbf{J})_{m,m+1}], \\ f_u &= \text{Det}\mathbf{J}, \quad \text{Det}\mathbf{J} \in [(\text{Det}\mathbf{J})_{0,m}, \gamma_m], \\ f_u &= \gamma_m, \quad \text{Det}\mathbf{J} \in [\gamma_m, (\text{Det}\mathbf{J})_{m,m+1}]. \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогично определим контур четырехугольника $P_k(1)$, ограниченного кривыми (25), (23) и прямыми $f_u = 1$, $f_u = \gamma_{k-1}$:

$$\begin{aligned} f_u &= \gamma_{k-1}, \quad \text{Det}\mathbf{J} \in [\gamma_{k-1}, (\text{Det}\mathbf{J})_{k-1,k}], \\ f_u &= \mu_k + \frac{\mu_k+1}{d\mu_k} \text{Det}\mathbf{J}, \quad \text{Det}\mathbf{J} \in [(\text{Det}\mathbf{J})_{k-1,k}, X_k], \\ f_u &= \text{Det}\mathbf{J}, \quad \text{Det}\mathbf{J} \in [\gamma_{k-1}, 1], \\ f_u &= 1, \quad \text{Det}\mathbf{J} \in [1, X_k], \end{aligned} \quad (33)$$

и контур четырехугольника $\Pi_k(\gamma_k)$:

$$\begin{aligned} f_u &= \gamma_{k-1}, \quad \text{Det} \mathbf{J} \in [\gamma_{k-1}, (\text{Det} \mathbf{J})_{k-1,k}], \\ f_u &= \mu_k + \frac{\mu_k+1}{d\mu_k} \text{Det} \mathbf{J}, \quad \text{Det} \mathbf{J} \in [(\text{Det} \mathbf{J})_{k-1,k}, (\text{Det} \mathbf{J})_{k,k+1}], \\ f_u &= \text{Det} \mathbf{J}, \quad \text{Det} \mathbf{J} \in [\gamma_{k-1}, \gamma_k], \\ f_u &= \gamma_k, \quad \text{Det} \mathbf{J} \in [\gamma_k, (\text{Det} \mathbf{J})_{k,k+1}]. \end{aligned} \quad (34)$$

Введение обобщенных переменных $(\text{Det}(\mathbf{J}), f_u)$ позволяет классифицировать всевозможные случаи качественного поведения системы и дать описание области неустойчивости Тьюринга во всех указанных случаях.

Лемма 1. Пусть $f_u < 1$. Тогда область неустойчивости Тьюринга пуста в двух случаях: 1) при $\mu_1 \geq 1$; 2) при $\mu_1 < 1$ и $\gamma_1 > 1$ в интервале изменения коэффициента диффузии

$$1 + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} < d \leq \left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right) \frac{1}{1-\mu_1}. \quad (35)$$

Доказательство. Если выполняется условие на коэффициент диффузии (27), то при наличии ограничения $f_u < 1$ область неустойчивости Тьюринга пуста тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$(f_u)_{0,1} = \frac{d\mu_1^2}{\mu_1(d-1)+1} \geq 1. \quad (36)$$

Условие (36) перепишем в виде $d(1 - \mu_1) \leq 1 + \frac{1}{\mu_1}$.

Если $\mu_1 \geq 1$, то неравенство (36) выполняется. Если $\mu_1 < 1$, то область неустойчивости будет пуста в диапазоне изменения коэффициента диффузии (35) при условии, что правая граница диапазона больше, чем левая. Элементарные выкладки показывают, что данное условие равносильно $\gamma_1 > 1$.

Замечание 1. Лемма 1 уточняет утверждение теоремы 4 из [11].

Лемма 2. Условие

$$d > \left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right) \frac{1}{1-\mu_1} \quad (37)$$

равносильно неравенству $X_1 > 1$.

Доказательство получается непосредственной подстановкой выражения (30) при $m = 1$ в неравенство $X_1 > 1$.

Замечание 2. Геометрически неравенство (37) имеет следующий смысл: треугольник $T_1(1)$ не пуст, т.е. точка пересечения $(f_u)_1$ с прямой $f_u = 1$ расположена правее точки пересечения кривой необходимых условий $f_u < \text{Det} \mathbf{J}$ с той же прямой.

Лемма 3. Если $d\mu_1\mu_2 > \gamma_1$, то $d\mu_2\mu_3 > \gamma_2$.

Доказательство. Из неравенства (27) вытекает неравенство $d > 1 + \frac{1}{\mu_2} + \frac{1}{\mu_3}$. Это верно, так как $\mu_1 < \mu_3$.

Лемма 4. Если при $k \geq 2$ выполняется неравенство $\gamma_{k-1} < 1 < \gamma_k$, то $1 < X_k < d\mu_k\mu_{k+1}$.

Доказательство. С учетом выражения (30) доказываемое неравенство равносильно неравенству

$$1 < \frac{1-\mu_k}{1+\mu_k} d\mu_k < d\mu_k\mu_{k+1}. \quad (38)$$

Правое неравенство в (38) преобразуется к $1 < \gamma_k$, а левое равносильно $d > \left(1 + \frac{1}{\mu_k}\right) \frac{1}{1-\mu_k}$.

При $\gamma_{k-1} < 1$ и $k \geq 2$ $\left(1 + \frac{1}{\mu_k}\right) \frac{1}{1-\mu_k} \leq 1 + \frac{1}{\mu_{k-1}} + \frac{1}{\mu_k} \leq 1 + \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}$, что доказывает данное утверждение.

Замечание 3. Лемма 3 имеет геометрическую трактовку. Если области достаточных условий принадлежит треугольник $T_1(\gamma_1)$, то четырехугольник $\Pi_2(\gamma_2)$ не пуст. Но с учетом леммы 4 при ограничении $\gamma_1 < 1 < \gamma_2$ (ввиду условия $f_u < 1$) области достаточных условий принадлежит только часть этого четырехугольника $\Pi_2(1)$. По индукции распространяем это утверждение на произвольное $k \geq 2$.

Случай равенства $\gamma_k = 1$ рассматривается отдельно.

Лемма 5. При $k \geq 1$ равенство $\gamma_k = 1$ равносильно совпадению абсцисс X_k и $(\text{Det} \mathbf{J})_{k,k+1}$ $X_k = d\mu_k\mu_{k+1}$.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (27) и $f_u < 1$. Тогда:

- если $\gamma_0 \geq 1$, то область достаточных условий пуста;
- если $\gamma_0 < 1$, но $\gamma_1 > 1$, то в интервале изменения коэффициента диффузии (35) область достаточных условий пуста, а при выполнении условия (37) область не пуста и ограничена треугольником $T_1(1)$ (31) при $m = 1$;
- если $\gamma_0 < 1$, но $\gamma_1 = 1$, то область ограничена треугольником $T_1(\gamma_1)$ (32) при $m = 1$;
- если $\gamma_1 < 1$, а $\gamma_2 > 1$, то область достаточных условий состоит из объединения треугольника $T_1(\gamma_1)$ (32) и четырехугольника $\Pi_2(1)$ (33) при $k = 2$;
- если $\gamma_1 < 1$, а $\gamma_2 = 1$, то область достаточных условий состоит из объединения треугольника $T_1(\gamma_1)$ (32) и четырехугольника $\Pi_2(\gamma_2)$ (34) при $k = 2$;
- если $\gamma_{k-1} < 1 < \gamma_k$ при $k \geq 3$, то область достаточных условий состоит из объединения $T_1(\gamma_1) \cup \Pi_2(\gamma_2) \cup \dots \cup \Pi_k(1)$;
- если $\gamma_{k-1} < 1$, $\gamma_k = 1$, при $k \geq 3$, то область достаточных условий состоит из объединения $T_1(\gamma_1) \cup \Pi_2(\gamma_2) \cup \dots \cup \Pi_k(\gamma_k)$.

С использованием Python написана программа, позволяющая изобразить области диффузионной неустойчивости исследуемых систем при изменении коэффициента диффузии на плоскостях параметров (a, b) , (A, B) , а также в обобщенных переменных $(\text{Det}(\mathbf{J}), f_u)$. На рисунке показаны области неустойчивости Тьюринга в указанных переменных. Рассматривается одномерный случай $\Omega = (0, l)$ для фиксированного коэффициента диффузии d и длины отрезка l изменения пространственной переменной x . Штриховкой выделена область достаточных условий неустойчивости Тьюринга, черным цветом закрашена область изменения параметров, при которых выполняются необходимые условия, но не выполняются достаточные.

Случай произвольных коэффициентов диффузии

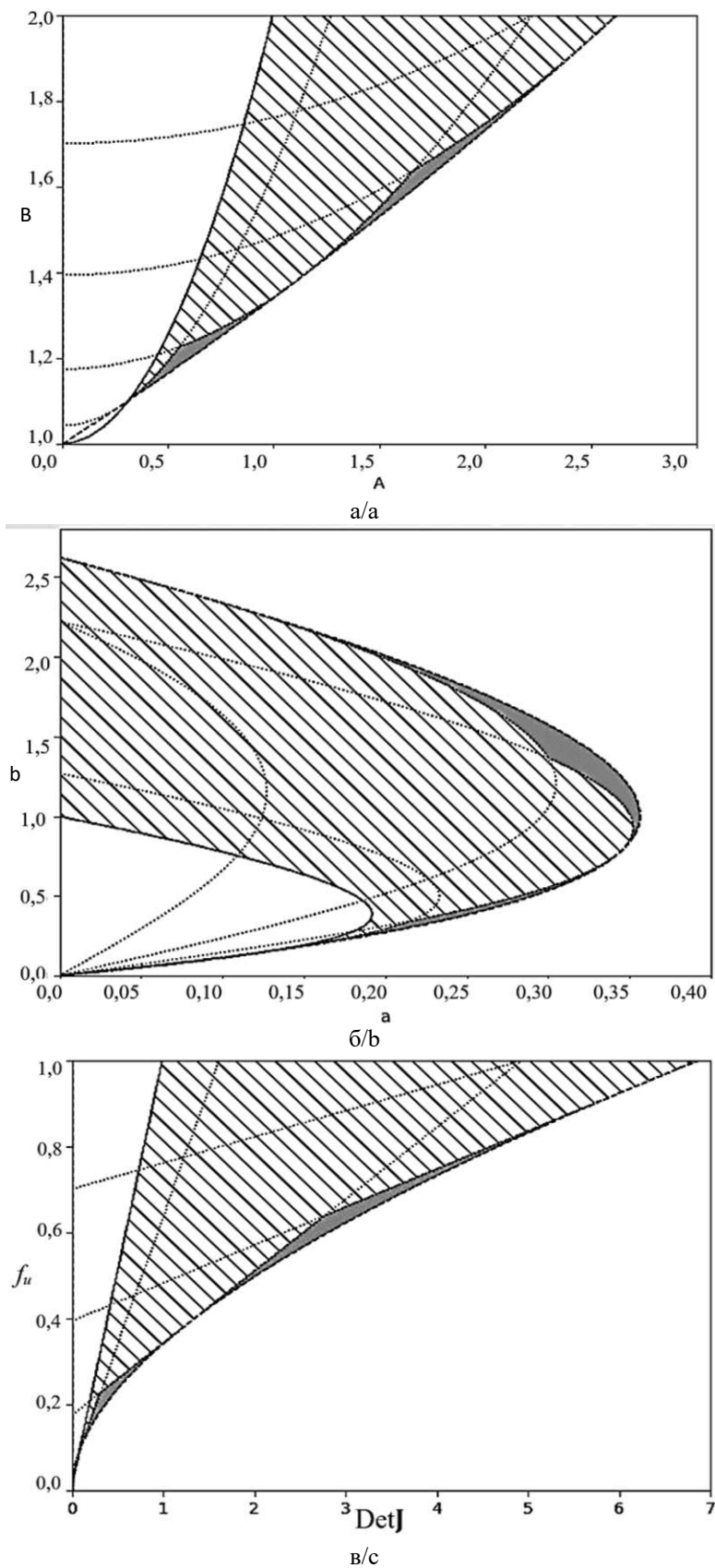
Пусть теперь значение d удовлетворяет условию

$$1 + \frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_{m+1}} < d \leq 1 + \frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_{m-1}}. \quad (39)$$

В [11] показано, что при выполнении условия (39) и отсутствии других ограничений диапазон волновых чисел, для которых имеет место неустойчивость Тьюринга, начинается с $k = m$, где $m \geq 2$. Аналогично теореме 1 доказывается

Теорема 2. Пусть выполняются условия (39) и $f_u < 1$. Тогда:

- если $\gamma_{m-1} \geq 1$, то область достаточных условий пуста;
- если $\gamma_{m-1} < 1$, но $\gamma_m > 1$, то в интервале изменения коэффициента диффузии $1 + \frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_{m+1}} < d \leq \left(1 + \frac{1}{\mu_m}\right) \frac{1}{1-\mu_m}$ область достаточных условий пуста, а при выполнении условия $\left(1 + \frac{1}{\mu_m}\right) \frac{1}{1-\mu_m} < d \leq 1 + \frac{1}{\mu_m} + \frac{1}{\mu_{m-1}}$ область не пуста и ограничена треугольником $T_m(1)$ (31);
- если $\gamma_{m-1} < 1$, но $\gamma_m = 1$, то область ограничена треугольником $T_m(\gamma_m)$ (32);
- если $\gamma_m < 1$, а $\gamma_{m+1} > 1$, то область достаточных условий состоит из объединения треугольника $T_m(\gamma_m)$ (32) и четырехугольника $\Pi_{m+1}(1)$ (33) при $k = m + 1$;
- если $\gamma_m < 1$, а $\gamma_{m+1} = 1$, то область достаточных условий состоит из объединения треугольника $T_m(\gamma_m)$ (32) и четырехугольника $\Pi_{m+1}(\gamma_{m+1})$ (34) при $k = m + 1$;
- если $\gamma_{k-1} < 1 < \gamma_k$, при $k \geq m + 2$, то область достаточных условий состоит из объединения $T_m(\gamma_m) \cup \Pi_{m+1}(\gamma_{m+1}) \cup \dots \cup \Pi_k(1)$;
- если $\gamma_{k-1} < 1$, $\gamma_k = 1$, при $k \geq m + 2$, то область достаточных условий состоит из объединения $T_m(\gamma_m) \cup \Pi_{m+1}(\gamma_{m+1}) \cup \dots \cup \Pi_k(\gamma_k)$.



Область достаточных условий неустойчивости Тьюринга: а – для брюсселятора в переменных (A, B) $d=40, l=15$; б – для системы Шнакенберга в переменных (a, b) при $a>0, d=40, l=15$; в – в обобщенных переменных $(\text{det} \mathbf{J}, f_u)$ при $f_u < 1, d=40, l=15$ / The region of sufficient conditions for Turing: a - for the Brusselator in variables (A, B) for $d=40, l=15$; b - for the Schnakenberg system in variables (a, b) for $a>0, d=40, l=15$; c - in generalized variables $(\text{det} \mathbf{J}, f_u)$ for $f_u < 1, d=40, l=15$

Заключение

Рассмотрены двухпараметрические системы химической кинетики – система Шнакенберга и брюсселятор с параметрами (a, b) и (A, B) соответственно, а также абстрактная система уравнений, которая служит их обобщением. Приведена замена переменных (параметры системы), в которых указанные системы совпадают в линейном приближении в окрестностях положений равновесия. Найдены области неустойчивости Тьюринга для указанных систем на плоскостях параметров систем и в обобщенных переменных, в которых данные системы совпадают в линейном приближении. Исследованы области, где выполняются необходимые, а также необходимые и достаточные условия неустойчивости Тьюринга. Описание области необходимых и достаточных условий неустойчивости Тьюринга дано для любого коэффициента диффузии $d > 1$. В соответствии с утверждениями, доказанными ранее [11, 14, 15], возможны два качественно различных случая: диапазон волновых чисел начинается с $k = 1$ и $k = m \geq 2$. Разработано приложение в среде Python, позволяющее проводить визуализацию областей неустойчивости Тьюринга при фиксированном коэффициенте диффузии. Показано, что если предполагать только положительность положений равновесия указанных систем, то как область необходимых условий, так и область необходимых и достаточных условий не пусты и не ограничены. В случае, когда на параметры системы накладывается дополнительное ограничение, соответствующее условию $a > 0$ для системы Шнакенберга, области неустойчивости Тьюринга становятся ограниченными; указаны условия, при которых они представляют собой пустое множество.

Список источников

1. Murray J.D. Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. 3th ed. N.Y.: Springer-Verlag, 2003. 814 p.
2. Wei J., Winter M. Mathematical Aspects of Pattern Formation in Biological Systems. London: Springer, 2014. 319 p.
3. Епифанов А.В., Цибулин В.Г. Математическая модель идеального распределения родственных популяций на неоднородном ареале // Владикавказский мат. журн. 2023. Т. 25, вып. 2. С. 78–88. Doi: 10.46698/t4351-7190-0142-г.
4. Казарников А.В., Ревина С.В. Возникновение автоколебаний в системе Рэля с диффузией // Вестн. ЮУрГУ. Серия: Мат. моделирование и программирование. 2016. Т. 9, № 2. С. 16–28.
5. Казарников А.В., Ревина С.В. Асимптотика стационарных решений в системе Рэля с диффузией // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2016. № 3 (191). С. 13–19.
6. Казарников А.В., Ревина С.В. Бифуркации в системе Рэля с диффузией // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 4. С. 499–514.
7. Казарников А.В., Ревина С.В. Монотонная неустойчивость в системе ФитцХью – Нагумо с диффузией // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2018. № 4 (200). С. 18–24.
8. Prigogine I., Lefever R. Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems // J. Chem. Phys. 1968. Vol. 48, № 4. P. 1695–1700.
9. Schnakenberg J. Simple chemical reaction systems with limit cycle behavior // J. of Theoretical Biology. 1979. Vol. 81, № 3. P. 389–400.
10. Turing A.M. The chemical basis of morphogenesis // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series B: Biological Sciences. 1952. Vol. 237, № 641. P. 37–72.
11. Revina S.V., Lysenko S.A. Sufficient Turing instability conditions for the Schnakenberg system // Вестн. Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31, № 3. С. 424–442.
12. Li P., Shi J., Wang Y., Feng X. Bifurcation analysis of reaction-diffusion Schnakenberg model // J. of Mathematical Chemistry. 2013. Vol. 51. P. 2001–2019.
13. Ревина С.В., Рябов А.С. Неустойчивость Тьюринга в однопараметрической системе Гирера – Мейнхардта // Изв. вузов. ПНД. 2023. Т. 31, № 4. С. 501–522.
14. Ревина С.В. Область диффузионной неустойчивости для систем параболических уравнений // Владикавказ. мат. журн. 2022. Т. 24, № 4. С. 136–145.
15. Revina S.V. Diffusion instability domains for systems of parabolic equations // Siberian Mathematical Journal. 2024. Vol. 65, № 2. P. 487–494.
16. Келеметова К.А. Нахождение области диффузионной неустойчивости для уравнения брюсселятора // Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития : материалы XXIX науч. конф., Ростов-на-Дону, 21–23 апреля 2022 г. Ростов н/Д.; Таганрог: Изд-во Южного фед. ун-та, 2022. С. 147–148.
17. Келеметова К.А., Ревина С.В. Визуализация областей неустойчивости Тьюринга в системах химической кинетики // Современные информационные технологии: тенденции и перспективы развития : материалы XXXI науч. конф., Ростов-на-Дону, 18–20 апреля 2024 г. Ростов н/Д.; Таганрог: Изд-во Южного фед. ун-та, 2024. С. 223–226.

References

1. Murray J. D. *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*. 3rd ed. New York: Springer; 2003. 814 p.
2. Wei J., Winter M. *Mathematical Aspects of Pattern Formation in Biological Systems*. London: Springer; 2014. 319 p.
3. Epifanov A. V., Tsybulin V. G. Mathematical Model of the Ideal Distribution of Related Species in a Non-homogeneous Environment. *Vladikavkazskii mat. zhurn. = Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2023;25(2):78-88. Doi: 10.46698/t4351-7190-0142-r. (In Russ.).
4. Kazarnikov A.V., Revina S.V. The onset of auto-oscillations in Rayleigh system with diffusion. *Vestn. YuUrGU. Seriya: Mat. modelirovanie i programmirovaniye = Bulletin of the South Ural State University. Mathematical Modeling, Programming and Computer Science*. 2016;9(2):16-28. (In Russ.).
5. Kazarnikov A.V., Revina S.V. Asymptotics of stationary solutions of Rayleigh reaction-diffusion system. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2016;(3):13-19. (In Russ.).
6. Kazarnikov A.V., Revina S.V. Bifurcations in a Rayleigh reaction-diffusion system. *Vestn. Udmurtskogo un-ta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki = The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2017;27(4):499-514. (In Russ.).
7. Kazarnikov A.V., Revina S.V. Monotonous instability in Fitzhugh-Nagumo reaction-diffusion system. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2018;(4):18-24. (In Russ.).
8. Prigogine I., Lefever R. Symmetry Breaking Instabilities in Dissipative Systems. *J. Chem. Phys.* 1968;48(4):1695-1700.
9. Schnakenberg J. Simple chemical reaction systems with limit cycle behaviour. *J. of Theoretical Biology*. 1979;81(3):389-400.
10. Turing A. M. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series B, Biological Sciences*. 1952;237(641):37-72.
11. Revina S.V., Lysenko S.A. Sufficient Turing instability conditions for the Schnakenberg system. *Vestn. Udmurtskogo un-ta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki = The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*. 2021;31(3):424-442.
12. Li P., Shi J., Wang Y., Feng X. Bifurcation analysis of reaction-diffusion Schnakenberg model. *J. of Mathematical Chemistry*. 2013;51(8):2001-2019.
13. Revina S.V., Ryabov A.S. Turing instability in the one-parameter Gierer-Meinhardt system. *Izv. vuzov. PND = University Proceedings. Applied Nonlinear Dynamics*. 2023;31(4):501-522. (In Russ.).
14. Revina S.V. Diffusion instability region for systems of parabolic equations. *Vladikavkazskii mat. zhurn. = Vladikavkaz Mathematical Journal*. 2022;24(4):117-126. (In Russ.).
15. Revina S.V. Diffusion instability domains for systems of parabolic equations. *Siberian Mathematical Journal*. 2024;65(2):487-494.
16. Kelemetova K.A. Investigation of the diffusion instability region for the Brusselator equation. *Modern information technologies: trends and development prospects : Proceedings of the 29th Scientific Conference*. Rostov-on-Don, April 21-23, 2022. Rostov-on-Don, Taganrog: Publishing House of the Southern Federal University; 2022:147-148. (In Russ.).
17. Kelemetova K.A., Revina S.V. Visualization of Turing instability regions in chemical kinetics systems. *Modern information technologies: trends and development prospects : Proceedings of the 31st scientific conference*. Rostov-on-Don, April 18-20, 2024. Rostov-on-Don, Taganrog: Publishing House of the Southern Federal University; 2024:223-226. (In Russ.).

Информация об авторах

С.В. Ревина – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, ЮФУ; научный сотрудник, отдел дифференциальных уравнений, ЮМИ ВЦ РАН.

К.А. Келеметова – магистрант, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича.

Information about the authors

S.V. Revina - Candidate of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, SFedU; Researcher, Department of Differential Equations, SMI VSC RAS.

K.A. Kelemetova – Master Student, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

Статья поступила в редакцию 20.05.2024; одобрена после рецензирования 15.06.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 20.05.2024; approved after reviewing 15.06.2024; accepted for publication 16.10.2024.

Научная статья

УДК 533.69

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-60-68

АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ КАЧЕСТВО ТОНКОГО КРЫЛА С ВИНГЛЕТАМИ РАЗЛИЧНОЙ ВЫСОТЫ

Илья Константинович Самсонов ^{1✉}, Межлум Альбертович Сумбатян ²

^{1, 2}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

¹hazar7073@yandex.ru ✉

²masumbatyan@sfedu.ru

Аннотация. Рассматривается задача несимметричного обтекания потоком воздуха тонкого крыла с винглетами. Определяется степень влияния высоты винглетов на подъемную силу и аэродинамическое качество тонкого крыла. В рамках этой теории задача сводится к системе трех двумерных интегральных уравнений. Для её решения представлена дискретная форма уравнений, полученная на основе метода дискретных вихрей. Описана методика расчета индуктивного сопротивления, вязкого трения, подсосывающей силы и аэродинамического качества. Представлены данные, полученные с помощью математической модели, основанной на линеаризованной теории тонкого крыла и методе малых возмущений. Сделаны выводы о влиянии высоты винглетов на подъемную силу и аэродинамическое качество. Рост высоты винглетов приводит к линейному увеличению подъемной силы. Отмечается, что на углах атаки до 4° высота винглетов не влияет на аэродинамическое качество, а выше 4° – повышает его.

Ключевые слова: аэродинамика, подъемная сила, аэродинамическое качество, тонкое крыло, винглеты

Для цитирования: Самсонов И.К., Сумбатян М.А. Аэродинамическое качество тонкого крыла с винглетами различной высоты // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 60–68.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

AERODYNAMIC QUALITY OF THIN WING WITH WINGLETS OF VARIOUS HEIGHTS

Ilya K. Samsonov ^{1✉}, Mezhlum A. Sumbatyan ²

^{1, 2}Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

¹hazar7073@yandex.ru ✉

²masumbatyan@sfedu.ru

Abstract. The paper considers the problem of asymmetrical airflow around a thin wing with winglets. There is studied the effect of winglets height on lifting force and aerodynamic quality of a thin wing. In frames of this theory, the problem is reduced to a system of three dual integral equations. To solve this system, a discrete form of equations which based on the discrete vortex method is presented. A method for calculating inductive drag, viscous friction, suction force and aerodynamic quality is described. There are presented the data obtained by using a mathematical model, which is based on a linearized theory of thin wing and a method of small perturbations. Conclusions about the effect of winglets on the lifting force and aerodynamic quality are made. Increasing the height of the winglets leads to a linear increase in lifting force. It is noted that at angles of attack up to 4° , winglets do not increase aerodynamic quality. At angles above 4° , increasing the height of the winglets increases aerodynamic quality of a thin wing.

Keywords: aerodynamics, lifting force, aerodynamic quality, thin wing, winglets

© Самсонов И.К., Сумбатян М.А., 2024

For citation: Samsonov I.K., Sumbatyan M.A. Aerodynamic Quality of Thin Wing with Winglets of Various Heights. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):60-68. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Летательные аппараты (ЛА) являются сложными и комплексными устройствами. Для их создания используются как научные, так и инженерные методы. Еще на стадии проектирования необходимо учитывать множество переменных, которые непосредственно влияют на ЛА. Все эти мероприятия нужно проводить для минимизации натуральных экспериментов и лётных испытаний. Для ЛА самолетного типа наиболее важной и комплексной характеристикой является аэродинамическое качество крыла, которое наиболее точно позволяет оценить его эффективность. Еще на заре авиастроения и аэродинамики аэродинамическому качеству крыла было посвящено множество исследований [1–3].

Сегодня существует много методов улучшения аэродинамического качества крыла. В авиации экспериментально и теоретически выведены оптимальные профили крыла [4, 5]. В конструкции ЛА использовалась различная геометрия крыла [6–8], форма законцовок (винглетов) [9]. Как правило, исследование влияния форм винглетов на аэродинамику крыла предполагает натурные эксперименты, поскольку теоретически описать сложную форму винглета (например, спиральную) на данный момент не представляется возможным. Существует способ теоретического исследования аэродинамики крыла произвольной формы при помощи метода дискретных вихрей (ДВ) [10] и различных коммерческих программных пакетов [11], влияния некоторых форм винглетов, но учесть действие большинства винглетов таким образом очень сложно. Кроме того, для таких расчетов необходимы современные высокопроизводительные системы, и даже с такими системами расчет аэродинамики ЛА требует больших затрат времени.

В связи с этим основной целью данной работы является распространение классической теории тонкого крыла на случай крыла с винглетами и разработка эффективного метода расчета для такой аэродинамической системы.

Заметим, что в работах [12, 13] метод, развиваемый в данной статье, был применен лишь к частному случаю симметричного обтекания. Мы обобщаем его на общий случай.

Постановка задачи

Тонкое крыло с двумя вертикальными винглетами, параллельными плоскости (x, z) , обтекается равномерным однородным потоком идеальной несжимаемой жидкости со скоростью V_0 , направленной параллельно оси x . Тонкое крыло представляет собой жесткую слабоизогнутую пластинку, поверхность которой определяется уравнением $z = f(x, y)$: $|\partial f / \partial x| \ll 1, |\partial f / \partial y| \ll 1$. Угол пластинки относительно набегающего потока (угол атаки) – α ; длина и ширина крыла – $2l$, $2a$ соответственно. Схема обтекания тонкого крыла с винглетами представлена на рис. 1.

В рамках линейной теории малых возмущений, при $p = p_0 + p'$, $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}'$, $|\mathbf{V}'|/V_0 \ll 1$, $|p'|/p_0 \ll 1$, в случае несжимаемой жидкости справедливы следующие соотношения:

$$\Delta\varphi' = 0, \quad \mathbf{V}' = \nabla\varphi'. \quad (1)$$

Линеаризованный интеграл Бернулли, согласно [14, 15], имеет вид

$$\frac{p'}{\rho} + 2V_0 V'_x = 0, \quad \rightarrow \quad \frac{p'}{\rho} + 2V_0 \frac{\partial\varphi'}{\partial x} = 0. \quad (2)$$

Из формул (1) и (2) следует, что аэродинамическое давление в данном случае удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta p' = 0$. Граничное условие на крыле может быть спроецировано на плоскость (x, y) .

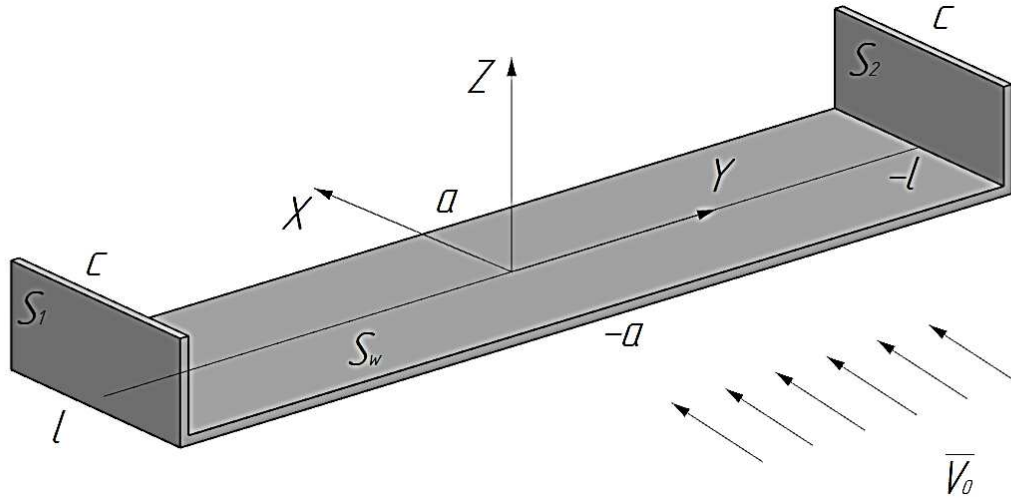


Рис. 1. Схема обтекания тонкой пластинки с винглетами
 / Fig. 1. Scheme of the flow past a thin plate with winglets

Из теории потенциала [15, 16]

$$p'(\mathbf{R}) = \iint_{S_{ext}} \left[p(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{R})}{\partial n_r} - \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n_r} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \right] dS_r, \quad G(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}, \quad (3)$$

где $\mathbf{R} = (x, y, z)$ – произвольная фиксированная точка наблюдения в жидкости; $\mathbf{r} = (\xi, \eta, \zeta)$ – точка, перемещающаяся по поверхности при интегрировании; S_{ext} – внешняя поверхность по отношению к S ; \mathbf{n}_r – внешняя нормаль к S_{ext} .

Докажем, что второе подынтегральное выражение равно нулю:

$$\left. \frac{\partial p(\mathbf{r})}{\partial n_r} \right|_S = -2\rho V_0 \left. \frac{\partial}{\partial n_r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right|_S = -2\rho V_0 \left. \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_r} \right) \right|_S = -2\rho V_0 \left. \frac{\partial V_n}{\partial x} \right|_S \equiv 0, \quad (4)$$

поскольку для жесткого крыла применимо условие непроницаемости на крыле $(V_n)_S = 0$, а поверхности S_w, S_1, S_2 параллельны оси x .

Тогда соотношение (3) с учетом (2) и граничного условия (4) сводится к виду

$$\begin{aligned} -2\rho V_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = p'(\mathbf{R}) &= \iint_{S_{ext}} p(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{R})}{\partial n_r} dS_r = \\ &= \iint_S \left[p_+(\mathbf{r}) \frac{\partial G}{\partial n_r^+} - p_-(\mathbf{r}) \frac{\partial G}{\partial n_r^-} \right] dS_r = - \iint_S \gamma(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{R})}{\partial n_r^+} dS_r. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь функция γ представляет собой локальный скачок давления на поверхности S , а именно $\gamma(\mathbf{r}) = p_-(\mathbf{r}) - p_+(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in S$.

Поскольку винглеты расположены вертикально по отношению к основному крылу, то уравнение (5) можно представить в виде

$$2\rho V_0 \frac{\partial \varphi'}{\partial x} = \iint_{S_w} \gamma(\mathbf{r}) \frac{\partial G}{\partial \zeta} \Big|_{\zeta=0} dS_r + \iint_{S_1} \gamma(\mathbf{r}) \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=-l} dS_r - \iint_{S_2} \gamma(\mathbf{r}) \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{\eta=l} dS_r, \quad (6)$$

где

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \zeta} \right|_{S_w} = \frac{z}{4\pi q_w^3}, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \right|_{S_1} = \frac{l+y}{4\pi q_1^3}, \quad \left. \frac{\partial G}{\partial \eta} \right|_{S_2} = \frac{y-l}{4\pi q_2^3}, \quad (7)$$

$$q_w = \left[(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad q_1 = \left[(\xi-x)^2 + (l+y)^2 + (\zeta-z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad q_2 = \left[(\xi-x)^2 + (l-y)^2 + (\zeta-z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Проинтегрируем (6) от $-\infty$ до x по переменной x . Взяв табличные интегралы [17], получим

$$4\pi\rho V_0\varphi' = \iint_{S_w} \frac{z\gamma_w(\xi,\eta)}{(y-\eta)^2+z^2} \left(\frac{x-\xi}{q_w} + 1 \right) d\xi d\eta + \iint_{S_1} \frac{(l+y)\gamma_1(\xi,\zeta)}{(l+y)^2+(\zeta-z)^2} \left(\frac{x-\xi}{q_1} + 1 \right) d\xi d\zeta + \iint_{S_2} \frac{(l-y)\gamma_2(\xi,\zeta)}{(l-y)^2+(\zeta-z)^2} \left(\frac{x-\xi}{q_2} + 1 \right) d\xi d\zeta. \quad (8)$$

В представлении (8) функция $\gamma_w(x,y)$ отвечает за локальную подъемную силу на основном крыле; $\gamma_1(x,z)$, $\gamma_2(x,z)$ – за локальную разность давлений на сторонах винглета S_1 , S_2 (рис. 1). На основном крыле S_w линейризованные компоненты единичной нормали к поверхности S_w равны $\mathbf{n} = \{-\partial f / \partial x, -\partial f / \partial y, 1\}$, поэтому условие непроницаемости $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) = 0$ в линейном приближении принимает вид

$$-V_0 \frac{\partial f}{\partial x} + \bar{V}_z = 0 \rightarrow \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = V_0 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (x,y,0) \in S_w. \quad (9)$$

На винглетах S_1 и S_2

$$V'_y = \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0, \quad (x,-l,z) \in S_1, \quad (x,l,z) \in S_2. \quad (10)$$

Выражение (8) с учетом граничных условий (9), (10) приводит к системе трех двумерных интегральных уравнений относительно функций $\gamma_w(x,y)$, $\gamma_1(x,z)$, $\gamma_2(x,z)$:

$$\iint_{S_w} \frac{\gamma_w(\xi,\eta)}{(y-\eta)^2} \left(\frac{x-\xi}{q_{ww}} + 1 \right) d\xi d\eta - \iint_{S_1} \gamma_1(\xi,\zeta) \frac{l+y}{t_{w1}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x-\xi}{q_{w1}} + 1 \right) d\xi d\zeta - \iint_{S_2} \gamma_2(\xi,\zeta) \frac{l-y}{t_{w2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{x-\xi}{q_{w2}} + 1 \right) d\xi d\zeta = 4\pi\rho V_0^2 \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (x,y,0) \in S_w, \quad (11)$$

$$t_{w1} = (l+y)^2 + \zeta^2, \quad q_{w1} = [(x-\xi)^2 + (l+y)^2 + \zeta^2]^{1/2},$$

$$t_{w2} = (l-y)^2 + \zeta^2, \quad q_{w2} = [(x-\xi)^2 + (l-y)^2 + \zeta^2]^{1/2}, \quad q_{ww} = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2},$$

$$- \iint_{S_w} \gamma_w(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{z}{t_{1w}} \left(\frac{x-\xi}{q_{1w}} + 1 \right) \right] d\xi d\eta + \iint_{S_1} \frac{\gamma_1(\xi,\zeta)}{(z-\zeta)^2} \left(\frac{x-\xi}{q_{11}} + 1 \right) d\xi d\zeta + \iint_{S_2} \frac{\gamma_2(\xi,\zeta)}{t_{12}(z-\zeta)^2} \left[\left(\frac{8l^2}{t_{12}} - 1 \right) \left(\frac{x-\xi}{q_{12}} + 1 \right) + \frac{4l^2(x-\xi)}{q_{12}^3} \right] d\xi d\zeta = 0, \quad (x,-l,z) \in S_1, \quad (12)$$

$$t_{1w} = (l+\eta)^2 + z^2, \quad q_{1w} = [(x-\xi)^2 + (l+\eta)^2 + z^2]^{1/2},$$

$$t_{12} = 4l^2 + (z-\zeta)^2, \quad q_{12} = [(x-\xi)^2 + 4l^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}, \quad q_{11} = [(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2},$$

$$- \iint_{S_w} \gamma_w(\xi,\eta) \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{z}{t_{2w}} \left(\frac{x-\xi}{q_{2w}} + 1 \right) \right] d\xi d\eta + \iint_{S_1} \frac{\gamma_1(\xi,\zeta)}{t_{12}(z-\zeta)^2} \left[\left(\frac{8l^2}{t_{12}} - 1 \right) \left(\frac{x-\xi}{q_{12}} + 1 \right) + \frac{4l^2(x-\xi)}{q_{12}^3} \right] d\xi d\zeta + \iint_{S_2} \frac{\gamma_2(\xi,\zeta)}{(z-\zeta)^2} \left(\frac{x-\xi}{q_{11}} + 1 \right) d\xi d\zeta = 0, \quad (x,l,z) \in S_2 \quad (13)$$

$$t_{2w} = (l-\eta)^2 + z^2, \quad q_{2w} = [(x-\xi)^2 + (l-\eta)^2 + z^2]^{1/2},$$

$$t_{12} = 4l^2 + (z-\zeta)^2, \quad q_{12} = [(x-\xi)^2 + 4l^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}, \quad q_{11} = [(x-\xi)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2},$$

При этом полная подъемная сила крыла P вычисляется по формуле

$$P = \iint_{S_w} \gamma_w(x,y) dx dy. \quad (14)$$

Дискретная форма системы 3×3 и аэродинамическое качество

Дискретизация формул (11)–(13) производилась на основе метода ДВ [10, 15, 16]. Выберем вдоль потока, размаха и высоты винглетов сетку узлов размерностью N_x , N_y , N_z . В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) для трёх неизвестных функций в выбранной системе узлов:

$$h_x \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \gamma_w(\xi_m, y_j) \left(\frac{q_{n,m,i}^{ww}}{x_n - \xi_m} + 1 \right) \Bigg|_{\eta=y_j - \frac{h_y}{2}}^{y_j + \frac{h_y}{2}} - h_x \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_z} \gamma_1(\xi_m, z_k) \frac{l + y_i}{t_i^{w1}} \left(\frac{x_n - \xi_m}{q_{n,m,i}^{w1}} + 1 \right) \Bigg|_{\zeta=z_k - \frac{h_z}{2}}^{z_k + \frac{h_z}{2}} -$$

$$- h_x \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_z} \gamma_2(\xi_m, z_k) \frac{l - y_i}{t_i^{w2}} \left(\frac{x_n - \xi_m}{q_{n,m,i}^{w2}} + 1 \right) \Bigg|_{\zeta=z_k - \frac{h_z}{2}}^{z_k + \frac{h_z}{2}} = 4\pi\rho V_0^2 \frac{\partial f(x_n, y_i)}{\partial x},$$

$$n = 2, \dots, N_x + 1, \quad i = 1, \dots, N_y,$$

$$q_{n,m,i}^{ww} = [(x_n - \xi_m)^2 + (y_i - \eta)^2]^{1/2}, \quad t_i^{w1} = (l + y_i)^2 + \zeta^2, \quad q_{n,m,i}^{w1} = [(x_n - \xi_m)^2 + (l + y_i)^2 + \zeta^2]^{1/2},$$

$$t_i^{w2} = (l - y_i)^2 + \zeta^2, \quad q_{n,m,i}^{w2} = [(x_n - \xi_m)^2 + (l - y_i)^2 + \zeta^2]^{1/2},$$

$$- h_x \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \gamma_w(\xi_m, y_j) \frac{z_u}{t_u^{1w}} \left(\frac{x_n - \xi_m}{q_{n,m,u}^{1w}} + 1 \right) \Bigg|_{\eta=y_j - \frac{h_y}{2}}^{y_j + \frac{h_y}{2}} + h_x \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_z} \gamma_1(\xi_m, z_k) \left(\frac{q_{n,m,u}^{11}}{x_n - \xi_m} + 1 \right) \Bigg|_{\zeta=z_k - \frac{h_z}{2}}^{z_k + \frac{h_z}{2}} +$$

$$+ h_x h_z \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_z} \gamma_2(\xi_m, z_k) \left[\left(\frac{8l^2}{t_{u,k}^{12}} - 1 \right) \left(\frac{x_n - \xi_m}{q_{n,m,u,k}^{12}} + 1 \right) + \frac{4l^2(x_n - \xi_m)}{(q_{n,m,u,k}^{12})^3} \right] = 0,$$

$$n = 2, \dots, N_x + 1, \quad u = 1, \dots, N_z,$$

$$q_{n,m,u}^{11} = [(x_n - \xi_m)^2 + (z_u - \zeta)^2]^{1/2}, \quad t_u^{1w} = (l + \eta)^2 + z_u^2, \quad q_{n,m,u}^{1w} = [(x_n - \xi_m)^2 + (l + \eta)^2 + z_u^2]^{1/2},$$

$$t_{u,k}^{12} = 4l^2 + (z_u - z_k)^2, \quad q_{n,m,u,k}^{12} = [(x_n - \xi_m)^2 + 4l^2 + (z_u - z_k)^2]^{1/2},$$

$$- h_x \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \gamma_w(\xi_m, y_j) \frac{z_u}{t_u^{2w}} \left(\frac{x_n - \xi_m}{q_{n,m,u}^{2w}} + 1 \right) \Bigg|_{\eta=y_j - \frac{h_y}{2}}^{y_j + \frac{h_y}{2}} +$$

$$+ h_x h_z \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_z} \gamma_1(\xi_m, z_k) \left[\left(\frac{8l^2}{t_{u,k}^{12}} - 1 \right) \left(\frac{x_n - \xi_m}{q_{n,m,u,k}^{12}} + 1 \right) + \frac{4l^2(x_n - \xi_m)}{(q_{n,m,u,k}^{12})^3} \right] +$$

$$+ h_x \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_z} \gamma_2(\xi_m, z_k) \left(\frac{q_{n,m,u}^{11}}{x_n - \xi_m} + 1 \right) \Bigg|_{\zeta=z_k - \frac{h_z}{2}}^{z_k + \frac{h_z}{2}} = 0,$$

$$n = 2, \dots, N_x + 1, \quad u = 1, \dots, N_z, \quad q_{n,m,u}^{11} = [(x_n - \xi_m)^2 + (z_u - \zeta)^2]^{1/2},$$

$$t_u^{2w} = (l - \eta)^2 + z_u^2, \quad q_{n,m,u}^{2w} = [(x_n - \xi_m)^2 + (l - \eta)^2 + z_u^2]^{1/2},$$

$$t_{u,k}^{12} = 4l^2 + (z_u - z_k)^2, \quad q_{n,m,u,k}^{12} = [(x_n - \xi_m)^2 + 4l^2 + (z_u - z_k)^2]^{1/2}.$$

В качестве силы сопротивления рассмотрена сумма индуктивного сопротивления D_{ind} и вязкого трения W . Индуктивное сопротивление можно вычислить по формулам, описанным в [18, 19]. В рамках данной работы вычислим D_{ind} как разность между проекцией подъемной силы на направление потока $P\alpha$ и подсосывающей силой T , которая известна в теории тонкого крыла [20]:

$$T = \frac{\pi}{4\rho V_0^2} \left[\int_{-\ell}^{\ell} \lim_{x \rightarrow -a} (a+x)\gamma_w^2(x, y) dy + 2 \int_0^c \lim_{x \rightarrow -a} (a+x)\gamma_1^2(x, z) dz \right], \quad D_{ind} = P\alpha - T.$$

Согласно [21], $W = 1,328\rho(2l)V_0^2 \sqrt{\frac{2a\nu_\epsilon}{V_0}}$, где ν_ϵ – кинематическая вязкость воздуха.

С учетом формулы для подъемной силы (14) вычислим аэродинамическое качество $Q = \frac{P}{(D_{ind} + W)}$.

Полученные данные

Расчет выполнялся в авторской программе на языке C++. Параметры размера сетки: $N_y = 100$, $N_z = 10$, $N_x = 40$. Полный размер дискретной сетки $(N_y + N_z)N_x = 4400$. Угол наклона пластинки относительно набегающего потока изменялся от 2° до 16° с шагом 2° . Рассмотрим подъемную силу пластинки 20×5 см. Результаты расчетов представлены в табл. 1. Графики сравнения подъемной силы пластинки 20×5 см с винглетами и без винглетов – на рис. 2.

Таблица 1 / Table 1

Подъемная сила пластинок 20×5 см без винглетов и с винглетами высотой 1 и 2 см
/ The lifting force of thin plate 20×5 cm without winglets and with winglets height 1 and 2 cm

Угол атаки $\alpha, ^\circ$	Подъемная сила P, мН			Увеличение P, %	
	Высота винглета, см			Высота винглета, см	
	0	1	2	1	2
2	92	97	103	5	12
4	183	193	207	5	13
6	275	291	310	6	13
8	366	388	413	6	13
10	458	485	517	6	13
12	550	582	620	6	13
14	641	679	723	6	13
16	732	776	827	6	13

На графике видно, что пластинка с винглетами имеет выигрыш в подъемной силе. На всех углах атаки для пластинки с винглетами высотой 1 см он составляет 5–6 %, что говорит об устойчивости полученных значений. При высоте винглетов 2 см выигрыш в подъемной силе достигает 13 %. По вышеописанным данным можно сделать вывод, что подъемная сила P линейно увеличивается с увеличением угла атаки в случае пластинки 20×5 см с винглетами и без винглетов. Данная картина вполне закономерна, поскольку в авиации винглеты не только препятствуют перетеканию воздушного потока снизу крыла на его верхнюю часть, но и увеличивают подъемную силу, а также уменьшают индуктивное сопротивление. В случае тонкого крыла с винглетами картина качественно та же самая.

Далее рассмотрим полученные данные для аэродинамического качества. Результаты представлены в табл. 2 и на рис. 3.

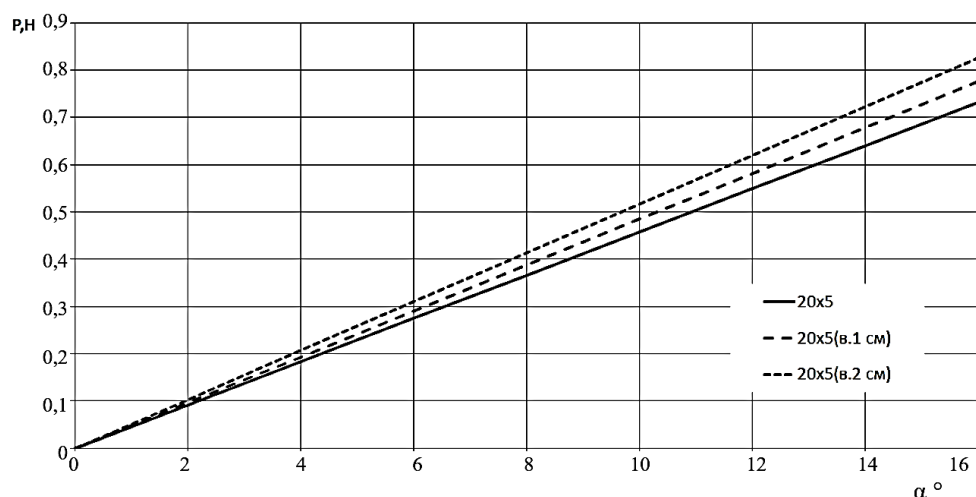


Рис. 2. График зависимости подъемной силы от угла атаки пластинки 20×5 см без винглетов и с винглетами высотой 1 и 2 см / Fig. 2. Dependency graph of the lifting force versus angle of attack the plates 20×5 cm without winglets and with winglets height 1 and 2 cm

Таблица 2 / Table 2

Аэродинамическое качество пластинок 20×5 см с винглетами и без винглетов
 / **The aerodynamic quality of thin plate 20×5 cm without winglets and with winglets height 1 and 2 cm**

Угол атаки α°	Аэродинамическое качество Q			Увеличение Q , %	
	Высота винглета, см			Высота винглета, см	
	0	1	2	1	2
2	7,97	7,74	7,62	-3	-4
4	12,01	11,95	12,18	-1	1
6	12,8	13,07	13,56	2	6
8	12,15	12,65	13,34	4	10
10	11,08	11,64	12,46	5	12
12	9,98	10,56	11,39	6	14
14	9,01	9,60	10,41	6	16
16	8,17	8,74	9,49	7	16

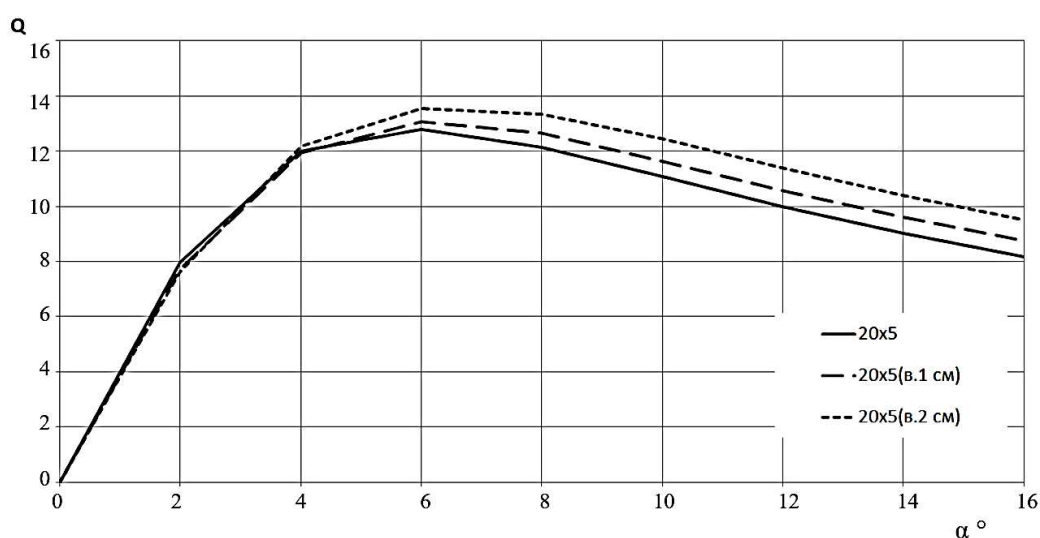


Рис. 3. График зависимости аэродинамического качества от угла атаки пластинок 20×5 см без винглетов и с винглетами высотой 1 и 2 см / Fig. 3. Dependency graph of the aerodynamic quality versus angle of attack the plates 20×5 cm without winglets and with winglets height 1 and 2 cm

Заключение

В данной работе теория тонкого крыла распространяется на крыло с винглетами при несимметричном обтекании потоком идеальной жидкости. Получена система двумерных интегральных уравнений размером 3×3 , которая после дискретизации приводит к СЛАУ относительно трех неизвестных функций: γ_w , γ_1 , γ_2 в узлах сетки, которые связаны с локальным скачком давления на основном крыле и винглетах. Представлено сравнение подъемной силы и аэродинамического качества пластинок без винглетов и с винглетами высотой 1 и 2 см.

С увеличением угла атаки линейно увеличивается подъемная сила (до 6 и 13 %) и аэродинамическое качество (до 7 и 16 %) для пластинок с винглетами высотой 1 и 2 см соответственно. Обусловлено это тем, что на малых углах атаки площадь пластинки с винглетами со стороны набегающего потока больше, чем без винглетов, а винглеты еще не выполняют свою функцию по увеличению подъемной силы и уменьшению индуктивного сопротивления, но уже заметно увеличивают вязкое сопротивление. На угле атаки 2° аэродинамическое качество у пластинок с винглетами ниже, чем у пластинки без винглетов. Но с 4° основное крыло пластинки с винглетами «затеняет» фронтальную сторону винглетов, тем самым уменьшая сопротивление, создаваемое винглетами. При этом с увеличением угла атаки винглеты начинают выполнять свою функцию.

Список источников

1. Николаев В.С. Аэродинамическое качество и балансировка крыла с затупленными кромками в гиперзвуковом потоке // Учен. зап. ЦАГИ. 1987. № 2. С. 104–111.
2. Животов С.Д. Оптимальные формы изолированного крыла в вязком гиперзвуковом потоке // Учен. зап. ЦАГИ. 1998. № 1–2. С. 25–32.
3. Горенбух П.И., Носов В.В. Совместное влияние вязкости и затупления на аэродинамическое качество треугольного крыла в потоке с большой сверхзвуковой скоростью // Учен. зап. ЦАГИ. 1989. № 3. С. 30–36.
4. Кравец А.С. Характеристики авиационных профилей. М.: Оборониздат, 1939. 213 с.
5. Ушаков Б.А., Красильщиков П.П., Волков А.К., Гржегоржевский А.Н. Атлас аэродинамических характеристик профилей крыльев. М.: БНТ НКАП при ЦАГИ, 1944. 339 с.
6. Головкин В.А., Головкин М.А., Ефремов А.А. Метод улучшения аэродинамических характеристик несущей поверхности // Учен. зап. ЦАГИ. 1996. № 1–2. С. 20–38.
7. Кюхеман М.А. Аэродинамическое проектирование самолетов. М.: Машиностроение, 1983. 656 с.
8. Москаленко В.О., Косырев А.А. Влияние угла стреловидности на изменение аэродинамических характеристик крыла // Инжен. журн.: наука и инновации. 2018. № 2. С. 1–13.
9. Москаленко В.О., Цой А.И., Недогарок А.А. Исследование аэродинамических характеристик с законцовками различной формы // Инжен. журн.: наука и инновации. 2019. № 10. С. 1–12.
10. Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985. 254 с.
11. Сакорнсин Р., Попов С.А. Улучшение аэродинамических характеристик комбинированного крыла путем добавления треугольного выступа // Электр. журн. «Труды МАИ». 2013. Вып. 65.
12. Самсонов И.К., Сумбатян М.А. О влиянии винглетов на аэродинамические свойства тонкого крыла // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2023. № 2. С. 38–47.
13. Самсонов И.К., Сумбатян М.А. Аналитический метод в линейной трехмерной аэродинамике тонкого крыла с винглетами // Экол. вестн. науч. центров Черноморского экономического сотрудничества. 2024. Т. 21, № 1. С. 41–46.
14. Katz J., Plotkin A. Low-Speed Aerodynamics. From Wing Theory to Panel Methods. N.Y.: McGraw-Hill, 1991. 632 p.
15. Sumbatyan M.A., Bondarchuk A.A., Mescheryakov K.I. An efficient numerical algorithm in the classical 3d theory of thin lifting surface in a flow of non-viscous incompressible fluid // Mechanics Research Communications. 2018. Vol. 89. P. 18–22.
16. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн. М.: Янус, 1995. 519 с.
17. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: элементарные функции. М.: Наука, 1981. 799 с.
18. Белоцерковский С.М. Тонкая несущая поверхность в дозвуковом потоке газа. М.: Наука, 1965. 243 с.
19. Кочин Н.Е. Теория крыла конечного размаха круговой формы в плане // ПММ. 1940. Т. 4, вып. 1. С. 1–32.
20. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1980. 448 с.
21. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.

References

1. Nikolaev V.S. Aerodynamic quality and balancing a wing with blunt edges in a hypersonic flow. *Uchen. zap. TsAGI = Scientific Notes of the Central Aerohydrodynamic Institute*. 1987;(2):104-111. (In Russ.).
2. Zhivotov S.D. Optimal forms of isolated wing in viscous hypersonic flow. *Uchen. zap. TsAGI = Scientific Notes of the Central Aerohydrodynamic Institute*. 1998;(1-2):25-32. (In Russ.).
3. Gorenbukh P.I., Nosov V.V. Joint influence of viscosity and bluntness on the aerodynamic quality of a delta wing in a flow with high supersonic speed. *Uchen. zap. TsAGI = Scientific Notes of the Central Aerohydrodynamic Institute*. 1989;(3):30-36. (In Russ.).
4. Kravets A.S. *Characteristics of aviation profiles*. State Publishing House of the Defence Industry; 1939. 213 p. (In Russ.).
5. Ushakov B.A., Krasilshikov P.P., Volkov A.K., Grjedorjevskiy A.N. *Atlas of aerodynamic characteristics of wing profiles*. Moscow: Publishing House of New Technique Bureau People's Committee of the Aviation Industry, Central Aerohydrodynamic Institute; 1944. 339 p. (In Russ.).
6. Golovkin V.A., Golovkin M.A., Efremov A.A. Method for improving the aerodynamic characteristics of the lifting surface. *Uchen. zap. TsAGI = Scientific Notes of the Central Aerohydrodynamic Institute*. 1996;(1-2):20-38. (In Russ.).
7. Kukheman M.A. *Aerodynamic design of aircraft*. Moscow: Mashinostroenie Publ.; 1983. 656 p. (In Russ.).
8. Moskalenko V.O., Kosyrev A.A. Effect of the sweep angle on changes in the aerodynamic characteristics of the wing. *Inzhen. zhurn.: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*. 2018;(2):1-13. (In Russ.).
9. Moskalenko V.O., Tsoi A.I., Nedogorok A.A. The study of aerodynamic characteristics of a wing with tips of various shapes. *Inzhen. zhurn.: nauka i innovatsii = Engineering Journal: Science and Innovation*. 2019;(10):1-12. (In Russ.).
10. Belotserkovsky S.M., Lifanov I.K. *Numerical methods in singular integral equations and their application in aerodynamics, elasticity theory, electrodynamics*. Moscow: Nauka Publ.; 1985. 254 p. (In Russ.).
11. Sakornsin R., Popov S.A. Improving the aerodynamic performance of the combined wing by adding a triangular ledge. *Trudy MAI = Works of the Moscow Aviation Institute*. 2013;(65).
12. Samsonov I.K., Sumbatyan M.A. The effect of winglets on the aerodynamic properties of a thin wing. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2023;(2):38-47. (In Russ.).
13. Samsonov I.K., Sumbatyan M.A. Analytical method in the linear three-dimensional aerodynamics of a thin wing with winglets. *Ekol. vestn. nauch. tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva = Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*. 2024;21(1):41-46. (In Russ.).
14. Katz J., Plotkin A. *Low-Speed Aerodynamics. From Wing Theory to Panel Methods*. New York: McGraw-Hill; 1991. 632 p.
15. Sumbatyan M.A., Bondarchuk A.A., Mescheryakov K.I. An efficient numerical algorithm in the classical 3d theory of thin lifting surface in a flow of non-viscous incompressible fluid. *Mechanics Research Communications*. 2018;89:18-22.
16. Lifanov I.K. *Method of singular intergral equations and numerical experiment in mathematical physics, aerodynamics, theory of elasticity and wave diffraction*. Moscow: Yanus Publ.; 1995. 520 p. (In Russ.).
17. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A., Marichev O.I. *Integrals and Series*. Vol. 1. New York: Gordon & Breach; 1986. 808 p.
18. Belotserkovsky S.M. *Thin lifting surface in a transonic flow of gas*. Moscow: Nauka Publ.; 1965. 243 p. (In Russ.).
19. Kochin N.E. Theory of a wing of finite span and circular shape in plan. *PMM = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1940;4(1):1-32. (In Russ.).
20. Sedov L.I. *Two-dimensional Problems in Hydrodynamics and Aerodynamics*. New York: Wiley; 1965. 433 p.
21. Schlichting H., Gersten K. *Boundary-Layer Theory*. Berlin; Heidelberg: Springer; 2017. 805 p.

Информация об авторах

И.К. Самсонов – аспирант, кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича.

М.А. Сумбатян – доктор физико-математических наук, профессор, кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук имени И.И. Воровича.

Information about the authors

I.K. Samsonov – Postgraduate Student, Department of Theoretical and Computational Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

M.A. Sumbatyan – Doctor of Science (Physics and Mathematics), Professor, Department of Theoretical and Computational Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science.

*Статья поступила в редакцию 20.05.2024; одобрена после рецензирования 15.06.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 20.05.2024; approved after reviewing 15.06.2024; accepted for publication 16.10.2024.*

Научная статья

УДК 517.392

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-69-76

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ОДНОМ КОНЦЕ И НЕОГРАНИЧЕННЫХ НА ДРУГОМ КОНЦЕ ИНТЕРВАЛА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Шалва Соломонович Хубежты

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

Южный математический институт – филиал Владикавказского научного центра РАН, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

Владикавказский филиал Финансового университета при Правительстве РФ, Владикавказ, Республика Северная Осетия – Алания, Россия

shalva57@rambler.ru

Аннотация. Решение гиперсингулярных интегральных уравнений с помощью приближенных методов является активно развивающимся направлением вычислительной математики. Это связано с многочисленными приложениями гиперсингулярных интегральных уравнений в различных областях математики и с тем обстоятельством, что аналитические решения таких уравнений возможны лишь в исключительных случаях. В работе предложен и обоснован метод нахождения решения, ограниченного на одном конце и неограниченного на другом конце интервала интегрирования $[-1, 1]$, гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с использованием рядов Чебышева. Ядро и правая часть уравнения представлены в виде рядов Чебышева, коэффициенты разложения которых вычисляются приближенно по квадратурным формулам Гаусса с наивысшей степенью точности. Коэффициенты разложения неизвестной функции в ряд Чебышева находятся с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Для обоснования вычислительной схемы используются методы функционального анализа и теории ортогональных многочленов. Вводится пространство Гельдера функций с соответствующими нормами. В этом пространстве рассматриваются заданные гиперсингулярные и соответствующие приближенные операторы. При выполнении условия существования у заданных функций производных до некоторого порядка, принадлежащих классу Гельдера, оценивается погрешность вычисления и дается порядок ее стремления к нулю.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, ряды Чебышева, формулы обращения, обоснование метода, погрешности

Для цитирования: Хубежты Ш.С. Приближенное решение гиперсингулярного интегрального уравнения с применением рядов Чебышева на классе функций, ограниченных на одном конце и неограниченных на другом конце интервала интегрирования // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 69–76.

Благодарности: работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2022-890.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

AN APPROXIMATE SOLUTION OF A HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATION USING CHEBYSHEV SERIES ON A CLASS OF FUNCTION BOUNDED AT ONE END AND UNBOUNDED AT THE OTHER END OF THE INTEGRATION INTERVAL

Shalva S. Khubezhty

*Khetagurov North Ossetian State University, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia - Alania, Russia
Southern Mathematical Institute - Branch of the Vladikavkaz Scientific Center, Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia - Alania, Russia
Vladikavkaz Branch of the Financial University under the Government of the Russian Federation, Vladikavkaz, Republic of North Ossetia - Alania, Russia
shalva57@rambler.ru*

Abstract. Approximate methods for solving hypersingular integral equations are an actively developing field of computational mathematics. This is due to the numerous applications of hypersingular integral equations in various fields of mathematics and the fact that analytical solutions of such equations are possible only in exceptional cases. A method for finding a solution, limited at one end and unlimited at the other end of the integration interval $[-1, 1]$, of hypersingular integral equations of the first kind using Chebyshev series is proposed and justified. The core and the right side of the equation are also decomposed into Chebyshev series, the decomposition coefficients of which are calculated approximately using quadrature Gauss formulas with the highest degree of accuracy. The coefficients of decomposition of an unknown function into a Chebyshev series are found by solving systems of linear algebraic equations. Methods of functional analysis and the theory of orthogonal polynomials are used to substantiate the computational scheme. The Helder space of functions with corresponding norms is introduced. Given hypersingular and corresponding approximate operators are considered in this space. When the condition for the existence of derivatives up to a certain order belonging to the Helder class for given functions is fulfilled, the calculation error is estimated and the order of its tendency to zero is given.

Keywords: hypersingular integral, Chebyshev series, conversion formulas, justification of the method, errors

For citation: Khubezhty Sh.S. An Approximate Solution of a Hypersingular Integral Equation Using Chebyshev Series on a Class of Function Bounded at One End and Unbounded at the Other End of the Integration Interval. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):69-76. (In Russ.).

Acknowledgments: the work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2022-890.

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Применение метода граничных интегральных уравнений к задачам механики разрушения, механики композитных материалов, аэродинамики, электродинамики [1–3] приводит к гиперсингулярным интегральным уравнениям первого рода

$$\mathbb{K}_0\psi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(x, t)\psi(t)dt = f(x), \quad (1)$$

где $-1 < x < 1$; $K(x, t)$, $f(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции; $\psi(t)$ – неизвестная функция.

Интеграл $H(\psi, x) = \int_{-1}^1 \frac{\psi(t)}{(t-x)^2} dt$ понимается в смысле Адамара, т.е. справедливо $\int_{-1}^1 \frac{\psi(t)}{(t-x)^2} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{-1}^{x-\varepsilon} \frac{\psi(t)}{(t-x)^2} dt + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\psi(t)}{(t-x)^2} dt - \frac{2\psi(x)}{\varepsilon} \right)$.

В прикладных задачах чаще всего встречаются случаи [1, 3], когда $\psi(t)$ имеет представление $\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)$, $\psi(t) = \sqrt{1-t^2}\varphi(t)$, $\psi(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\varphi(t)$, $\psi(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – достаточно гладкая функция на отрезке $[-1, 1]$.

Для первого и второго случаев построены вычислительные схемы с применением многочленов Чебышева, позволяющие найти приближенные решения [4–6].

В этой статье будем искать приближенное решение, ограниченное на одном конце и неограниченное на другом конце промежутка $[-1, 1]$, т.е. в виде $\psi(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\varphi(t)$, $\psi(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\varphi(t)$.

Вычислительная схема

Решение уравнения (1) будем искать как ограниченное на левом конце и неограниченное на правом, $\psi(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\varphi(t)$. Тогда (1) принимает вид

$$\mathbb{K}\varphi = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} K(x, t)\varphi(t) dt = f(x), \quad (2)$$

где $-1 < x < 1$; $K(x, t)$, $f(x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции до второго порядка на отрезке $[-1, 1]$.

Как показано в [7], уравнение (2) имеет единственное решение при дополнительном условии

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t) dt = \alpha_0, \quad (3)$$

где α_0 – произвольная постоянная.

Известно, что многочлены Чебышева третьего рода [8] являются ортогональными на отрезке $[-1, 1]$ по весовой функции $p(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ и имеют вид $C_n(t) = \frac{\cos^{\frac{2n+1}{2}} \arccos t}{\cos^{\frac{\arccos t}{2}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

В частности,

$$\begin{aligned} C_0(t) &= 1, \quad C_1(t) = 2t - 1, \quad C_2(t) = 4t^2 - 2t - 1, \\ C_3(t) &= 8t^3 - 4t^2 - 4t + 1, \quad C_4(t) = 16t^4 - 8t^3 - 12t^2 + 4t + 1, \\ C_5(t) &= 32t^5 - 16t^4 - 32t^3 + 12t^2 + 6t - 1, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Для таких многочленов справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} C_n(t) C_m(t) dt = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m. \end{cases} \quad (5)$$

Разложим функции $K(x, t)$, $\varphi(t)$ и $f(x)$ в ряды по многочленам Чебышева $C_n(t)$. Имеем

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_i(x), \quad K(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{li} C_l(x) C_i(t), \quad \varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t). \quad (6)$$

Коэффициенты a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) неизвестны, так как неизвестна искомая функция $\varphi(t)$. Остальные коэффициенты d_i и c_{li} вычисляются следующим образом:

$$d_i = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} f(t) C_i(t) dt, \quad (7)$$

$$c_{li} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} K(x, t) C_i(t) dt \right) C_l(x) dx.$$

Подставляя разложения функций $K(x, t)$, $\varphi(t)$ и $f(x)$ из (6) в (2), получим

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_{li} C_l(x) C_i(t) \right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k(t) dt = \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_i(x). \quad (8)$$

Используя равенство $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{C_n(t)}{(t-x)^2} dt = S'_n(x)$ [8], где $S_n(x)$ – многочлен Чебышева четвертого рода, формулу (5) и тот факт, что ряды в (8) являются равномерно сходящимися [6], т.е. можно поменять порядок суммирования, равенство (8) приведем к виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k S'_k(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{ki} C_i(x) a_k = \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_i(x).$$

Далее разложим также $S'_k(x)$ по многочленам $C_n(x)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{ik} C_i(x) + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{ik} \right) C_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i C_i(x),$$

где

$$b_{ik} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} S'_k(t) C_i(t) dt, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Отсюда по свойству равенства многочленов получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{ik} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k c_{ik} = d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Коэффициенты b_{ik}, c_{ik}, d_i ($i, k = 0, 1, 2, \dots$) можно вычислить точно по формулам (7) и (9) или приближенно с помощью квадратурных формул Гаусса наивысшей степени точности [8, 9].

Бесконечная система линейных алгебраических уравнений (10) с неизвестными a_0, a_1, a_2, \dots решается приближенно после решения системы

$$\sum_{k=0}^n a_k b_{ik} + \sum_{k=0}^n a_k c_{ik} = d_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (11)$$

Из условия (3) вытекает, что $a_0 = \alpha_0$, т.е. остаются неизвестными a_1, a_2, \dots, a_n . Решая эту систему, мы получим приближенное решение уравнения (2) в виде

$$\varphi(t) \approx \varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k C_k(t). \quad (12)$$

Обоснование вычислительной схемы

Вначале заметим, что обоснование вычислительной схемы приводится аналогично [6, 10].

Обозначим через X пространство функций вида $x(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – непрерывно дифференцируемая функция до второго порядка на $[-1, 1]$, и вторая производная удовлетворяет условию Гёльдера $H(\alpha)$ с показателем α ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$) [7, 10]. Это пространство обозначается $W^2H(\alpha)$. Норма в пространстве X определяется формулой

$$\|x\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi(t)| + \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi'(t)| + \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi''(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi''(t_1) - \varphi''(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Введем обозначения: Y – пространство функций вида $y(t) = \psi(t)$ из класса $H(\alpha)$ с нормой $\|y(t)\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |\psi(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\psi(t_1) - \psi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}$, $0 < \beta < \alpha$; X_n – пространство функций вида

$$x_n(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi_n(t), \quad \varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k C_k(t), \quad \text{с нормой}$$

$$\|x_n(t)\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi_n(t)| + \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi_n'(t)| + \max_{-1 \leq t \leq 1} |\varphi_n''(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi_n''(t_1) - \varphi_n''(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \quad 0 < \beta < \alpha;$$

Y_n – пространство функций вида $y_n(t) = \psi_n(t)$, $\psi_n(t) = \sum_{k=0}^n \alpha_k C_k(t)$ с нормой

$$\|y_n(t)\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |\psi_n(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\psi_n(t_1) - \psi_n(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}, \quad 0 < \beta < \alpha.$$

Утверждение. Оператор \mathbb{K} действует из пространства X в Y . Для этого достаточно доказать следующую лемму.

Лемма. Если $\varphi(t) \in W^2H(\alpha)$, то $\Phi(x) \in H(\alpha)$, где $\Phi(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt$.

Действительно, рассмотрим $\Phi(x)$, ее представим таким образом:

$$\Phi(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t) - \varphi(x) - \varphi'(x)(t-x) - \frac{\varphi''(x)}{2!}(t-x)^2}{(t-x)^2} dt + \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(x) + \varphi'(x)(t-x) + \frac{\varphi''(x)}{2!}(t-x)^2}{(t-x)^2} dt.$$

После упрощения второго слагаемого, используя формулы $\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{dt}{(t-x)} = \pi$,

$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} dt = \pi$, получаем $\Phi(x) = I_1(x) + \pi \varphi'(x) + \frac{1}{2} \pi \varphi''(x) = I_1(x) + I_2(x)$, где

$$I_1(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t) - \varphi(x) - \varphi'(x)(t-x) - \frac{\varphi''(x)}{2!}(t-x)^2}{(t-x)^2} dt, \quad I_2(x) = \pi \left(\varphi'(x) + \frac{1}{2} \varphi''(x) \right).$$

Очевидно, $I_2(x) \in H(\alpha)$, так как $\varphi'(x) \in H(\alpha), \varphi''(x) \in H(\alpha)$. Рассмотрим $I_1(x)$. Его упрощаем, используя формулу Тейлора, следующим образом:

$$I_1(x) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{1}{(t-x)^2} \left(\varphi(x) + \varphi'(x)(t-x) + \frac{\varphi''(\xi)}{2!}(t-x)^2 - \varphi(x) - \varphi'(x)(t-x) - \frac{\varphi''(x)}{2!}(t-x)^2 \right) dt.$$

После вычисления интегралов получаем

$$I_1(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} (\varphi''(x + \theta(t-x)) - \varphi''(x)) dt, \quad 0 < \theta < 1.$$

Аналогично [7, 10, 11] доказывается, что $|I_1(x+h) - I_1(x)| = O(h^\alpha)$, так как $\varphi(t) \in W^2H(\alpha)$, т.е. $I_1(x) \in H(\alpha)$.

Оператор \mathbb{K} состоит из гиперсингулярного и регулярного интегралов. По лемме гиперсингулярный интеграл принадлежит классу $H(\alpha)$, регулярный – классу $H(\alpha)$. Следовательно, оператор \mathbb{K} действует из пространства X в Y . И как мы уже отметили выше, уравнение (2) имеет единственное решение. Из-за этого будем считать, что существует линейный обратный оператор \mathbb{K}^{-1} , действующий из Y в X в условии (3).

Обозначим через P_n оператор, проектирующий пространство Y на пространство Y_n по формуле $P_n[y(t)] = P_n[\psi(t)]$, где $\psi(t) \in C[-1, 1]$ – интерполяционный многочлен, т.е. $P_n[\psi(t)]$ – оператор, проектирующий непрерывные функции на множество многочленов вида $\sum_{k=0}^n \alpha_k C_k(t)$. Известно, что $\|P_n\| \leq C \ln n$, $C = const$ [6, 10].

Приближенное решение (1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi_n(t) = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \sum_{k=0}^n a_k C_k(t), \quad \text{где } C_k(t) \text{ – ортогональные многочлены с весом } \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

на отрезке $[-1, 1]$, т.е. многочлены Чебышева третьего рода.

Коэффициенты a_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) определяются из системы линейных алгебраических уравнений (11), представленной в операторной форме уравнением

$$P_n \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x_n(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} P_n^t [K(t, \tau) \varphi_n(\tau)] d\tau \right\} = P_n [f(t)]. \quad (13)$$

Воспользовавшись формулой обращения [8, с. 86] и квадратурными формулами Гаусса [9, с. 134], уравнение (13) представим в виде

$$\mathbb{K}_n x_n = P_n \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x_n(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau \right] + P_n \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\tau}{1-\tau}} P_n^t [K(t, \tau) \varphi_n(\tau)] d\tau \right] = P_n [f(t)]. \quad (14)$$

Следуя рассуждениям, приведённым в статье [10], покажем, что при таком n , что

$q = C \|\mathbb{K}^{-1}\| n^\beta \left(\bar{E}_n^t(K(t, \tau)) + \bar{E}_n^t(K(t, \tau)) \right) \ln n < 1$, система уравнений (14) имеет единственное решение x_n^* и справедлива оценка

$\|x^*(t) - x_n^*(t)\| \leq C n^\beta \|\mathbb{K}^{-1}\| \left(\bar{E}_n^t(K(t, \tau)) + \bar{E}_n^t(K(t, \tau)) \right) \ln n$, где $x^*(t)$ – решение уравнения (1); $\bar{E}_n^t(K(t, \tau)) = \max_{-1 \leq \tau \leq 1} |K(t, \tau) - K_n^t(t, \tau)|$; $K_n^t(t, \tau)$ – полином наилучшего равномерного приближения степени n по переменной τ к функции $K(t, \tau)$.

Вводим оператор $\bar{\mathbb{K}}_n x_n = P_n \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{x_n(\tau)}{(\tau-t)^2} d\tau \right] + P_n^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(t, \tau) x_n(\tau) d\tau \right] = P_n [f(t)]$.

Оценим норму

$$\begin{aligned} \|\mathbb{K}x_n - \bar{\mathbb{K}}_n x_n\| &= \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(t, \tau) x_n(\tau) d\tau - P_n^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 K(t, \tau) x_n(\tau) d\tau \right] \right\| \leq \\ &\leq \left\| \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (K(t, \tau) - K_n^t(t, \tau)) x_n(\tau) d\tau \right\| + \left\| P_n^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (K(t, \tau) - K_n^t(t, \tau)) x_n(\tau) d\tau \right] \right\| = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Оценки проводятся в пространстве $C[-1, 1]$, далее [10], повторяя ход доказательства в пространстве X_n , с появлением множителя n^β получаем

$$I_1 \leq C n^\beta \bar{E}_n^t(K(t, \tau)) \|x_n\|, \quad I_2 \leq C n^\beta \|P_n\| \bar{E}_n^t(K(t, \tau)) \|x_n\|,$$

и, следовательно, $\|\mathbb{K}x_n - \bar{\mathbb{K}}_n x_n\| \leq C n^\beta \|P_n\| \bar{E}_n^t(K(t, \tau)) \|x_n\|$.

Из последнего неравенства и общей теории приближенных методов для обратных операторов [12, гл. V, с. 211; гл. XIV, с. 517] следует, что при таких n , что $q < 1$, существует обратный оператор $\bar{\mathbb{K}}_n^{-1}$ с нормой $\|\bar{\mathbb{K}}_n^{-1}\| \leq \frac{\|\mathbb{K}^{-1}\|}{1-q}$; здесь $q = C n^\beta \|\mathbb{K}^{-1}\| \|P_n\| \bar{E}_n^t(K(t, \tau))$. Так как оператор $\bar{\mathbb{K}}_n$ конечномерный, то существует линейный обратный $\bar{\mathbb{K}}_n^{-1}$ с той же нормой. Оценим $\|\bar{\mathbb{K}}_n - \mathbb{K}_n\|$.

Очевидно,

$$\|\bar{\mathbb{K}}_n x_n - \mathbb{K}_n x_n\| = \left\| P_n^t \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (K(t, \tau) - P_n^t[K(t, \tau)]) x_n(\tau) d\tau \right] \right\| \leq Cn^\beta \|P_n\| \bar{E}_n^t(K(t, \tau)) \|x_n\|.$$

Пусть существует такое n^* , что при $n > n^*$ выполняется неравенство $Cn^\beta \|\bar{\mathbb{K}}_n^{-1}\| \|P_n\| \bar{E}_n^t(K(t, \tau)) < 1$. Тогда из теоремы Банаха [12, с. 211] следует, что $\|x^*(t) - x_n^*(t)\| \leq Cn^\beta \|P_n\| (\bar{E}_n^t(K(t, \tau)) + \bar{E}_n^\tau(K(t, \tau)))$, где x^* и x_n^* – решения уравнения (1) и (14).

Обобщая эти результаты и используя общую теорию приближенных методов [12], сформулируем заключение в виде теоремы.

Теорема. Если существует линейный обратный оператор $\mathbb{K}_0^{-1}(\mathbb{K}^{-1})$ и функции $K(x, t)$ и $f(x)$ принадлежат классу $W^r H(\alpha)$ ($r \geq 2$) (т.е. имеют непрерывные производные порядка $r - 1$, а производная порядка r удовлетворяет условию Гёльдера с показателем α ($\frac{1}{2} < \alpha < 1$)), то при таких n , что $Cn^\beta \|\mathbb{K}^{-1}\| (\bar{E}_n^x(K(x, t)) + \bar{E}_n^t(K(x, t))) \ln n < 1$, система (11) имеет единственное решение и справедлива оценка $|\varphi(t) - \varphi_n(t)| = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right)$, $0 < \beta < \alpha$, где $\varphi(t)$ – решение уравнения (2); $\varphi_n(t)$ – его приближенное решение вида (12).

Замечание. Аналогично строится вычислительная схема для уравнения (1), когда ищется решение, неограниченное на левом конце и ограниченное на правом, т.е. вида $\psi(t) = \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \varphi(t)$. Только тогда в роли ортогональных многочленов используются многочлены

Чебышева четвертого рода $S_n(t) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \arccos t}{\sin \frac{\arccos t}{2}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Тестовые примеры

Изложенный метод решения гиперсингулярного интегрального уравнения апробирован на тестовых примерах.

Рассмотрим следующие гиперсингулярные интегральные уравнения с дополнительными условиями для единственности решения:

$$1. \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} (x+t) \varphi(t) dt = x + \frac{1}{2}.$$

Дополнительное условие $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t) dt = 1$.

Точное решение $\varphi(t) = 1$.

$$2. \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} (x+t) \varphi(t) dt = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}.$$

Дополнительное условие $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t) dt = \frac{1}{2}$.

Точное решение $\varphi(t) = t$.

$$3. \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \frac{\varphi(t)}{(t-x)^2} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} (x+t) \varphi(t) dt = \frac{5x}{2} + \frac{11}{8}.$$

Дополнительное условие $\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \varphi(t) dt = \frac{1}{2}$.

Точное решение $\varphi(t) = t^2$.

После решения систем линейных алгебраических уравнений (11) для каждого уравнения $n = 5$ получены численные результаты и приближенные решения на основе формулы (4) (таблица).

Численные результаты и приближенные решения / Numerical results and approximate solutions

Коэффициенты разложения решения	Уравнение (1). Точное решение $\varphi(t) = 1$	Уравнение (2). Точное решение $\varphi(t) = t$	Уравнение (3). Точное решение $\varphi(t) = t^2$
a_0	1	0,5	0,5
a_1	$-6,914976 \cdot 10^{-8}$	0,5	0,25
a_2	$-5,107607 \cdot 10^{-9}$	$7,769932 \cdot 10^{-9}$	0,25
a_3	$1,873661 \cdot 10^{-10}$	$1,115939 \cdot 10^{-9}$	$-6,997769 \cdot 10^{-9}$
a_4	$3,605662 \cdot 10^{-9}$	$-3,080189 \cdot 10^{-9}$	$-3,633776 \cdot 10^{-9}$
a_5	$-1,655185 \cdot 10^{-9}$	$1,551454 \cdot 10^{-9}$	$1,216512 \cdot 10^{-8}$
Приближенное решение уравнения	$\varphi(t) \approx \sum_{k=0}^5 a_k C_k(t) \approx 1$	$\varphi(t) \approx \sum_{k=0}^5 a_k C_k(t) \approx t$	$\varphi(t) \approx \sum_{k=0}^5 a_k C_k(t) \approx t^2$

Полученные численные результаты для коэффициентов и приближенного решения показывают высокую эффективность метода.

Список источников

1. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1966. 512 с.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995. 520 с.
3. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001. 508 с.
4. Хубежты Ш.С., Бесаева З.В. Приближенное решение сингулярного интегрального уравнения, не ограниченного на концах отрезка интегрирования, с применением рядов Чебышева // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2017. № 2. С. 26–31.
5. Хубежты Ш.С. Приближенное решение гиперсингулярного интегрального уравнения I рода, ограниченного на обоих концах отрезка интегрирования, с применением рядов Чебышева // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2021. № 1. С. 25–33.
6. Хубежты Ш.С. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с применением рядов Чебышева на классе функций, обращающихся в нуль на одном конце и в бесконечность на другом конце интервала интегрирования // Сиб. журн. вычисл. математики. 2021. Т. 24, № 3. С. 331–341.
7. Бойков И.В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Динамические системы. 2019. Т. 9 (37), № 3. С. 244–272.
8. Хубежты Ш.С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2011. 500 с.
9. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
10. Бойков И.В., Бойкова А.И., Семов М.А. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // Изв. вузов. Приволжский регион. Физ.-мат. науки. 2015. № 3 (35). С. 11–27.
11. Бойков И.В., Бойкова А.И. Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго рода // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании : XIII Междунар. науч. конф. 12–16 июля 2017 г. Саранск, 2017. С. 446–461.
12. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1997. 720 с.

References

1. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations*. Moscow: Nauka Publ.; 1966. 512 p. (In Russ.).
2. Lifanov I. K. *The method of singular integral equations and numerical experiment*. Moscow: Yanus Publ.; 1995. 520 p. (In Russ.).
3. Vainikko G. M., Lifanov I. K., Poltavsky L. N. *Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications*. Moscow: Yanus-K Publ.; 2001. 508 p. (In Russ.).
4. Khubezhty Sh. S., Besaeva Z. V. Approximate solution of a singular integral equation, not limited at the ends of the integration segment, using Chebyshev series. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2017;(2):26-31. (In Russ.).
5. Khubezhty Sh. S. Approximate solution of a hypersingular integral equation of the first kind, bounded at both ends of the integration segment, using Chebyshev series. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2021;(1):25-33. (In Russ.).

6. Khubezhty Sh. S. Approximate solution of singular integral equations using Chebyshev series on a class of functions that vanish at one end and infinity at the other end of the integration interval. *Sib. zhurn. vychisl. matematiki = Siberian Journal of Computational Mathematics*. 2021;24(3):331-341. (In Russ.).

7. Boikov I. V. Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations. *Dinamicheskie sistemy = Dynamic Systems*. 2019;9(3):244-272. (In Russ.).

8. Khubezhty Sh. S. *Quadrature formulas for singular integrals and some of their applications*. Vladikavkaz: Southern Mathematical Institute - branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences Press; 2011. 500 p. (In Russ.).

9. Krylov V. I. *Approximate calculation of integrals*. Moscow: Nauka Publ.; 1967. 500 p. (In Russ.).

10. Boikov I. V., Boikova A. I., Semov M. A. Approximate solution of hypersingular integral equations of the first. *Izv. vuzov. Privolzhskii region. Fiz.-mat. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. Mathematics*. 2015;(3):11-27. (In Russ.).

11. Boikov I. V., Boikova A. I. Approximate solution of hypersingular integral equations of the first with features of the second kind. *Differential equations and their applications in mathematical modeling : 13rd International Scientific Conference*. Saransk, 2017:446-461. (In Russ.).

12. Kantorovich L. V., Akilov G. P. *Functional analysis*. Moscow: Nauka Publ.; 1997. 720 p. (In Russ.).

Информация об авторе

Ш.С. Хубежты – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры алгебры и анализа, СОГУ; ведущий научный сотрудник, отдел математического моделирования, ЮМИ ВШЦ РАН; профессор кафедры математики и информатики, Владикавказский филиал, ФинУ.

Information about the author

Sh.S. Khubezhty - Doctor of Science (Physics and Mathematics), Associate Professor, Professor of the Department of Algebra and Analysis, NOSU; Leading Researcher, Department of Mathematical Modeling, SMI VSC RAS; Professor of the Department of Mathematics and Computer Science, Vladikavkaz branch, FinU.

Статья поступила в редакцию 19.07.2024; одобрена после рецензирования 10.08.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 19.07.2024; approved after reviewing 10.08.2024; accepted for publication 16.10.2024.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

BIOLOGICAL SCIENCES

Научная статья

УДК 606;579.64

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-77-89

БИОТЕХНОЛОГИЧЕСКИ ПЕРСПЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА БАКТЕРИЙ РОДОВ *BACILLUS* И *RAENIBACILLUS*, ВЫДЕЛЕННЫХ ИЗ РИЗОСФЕРЫ ПШЕНИЦЫ ОЗИМОЙ (*TRITICUM AESTIVUM* L.). ЧАСТЬ 1

Н.Г. Васильченко¹, К.В. Механцева², Ф.Д. Иванов³, Е.П. Пуликова⁴, В.А. Чистяков⁵,
Ал.В. Усатов⁶, А.Б. Брень⁷✉, Д.В. Рудой⁸

¹Альметьевский государственный нефтяной институт, Альметьевск, Республика Татарстан, Россия

²Московский физико-технический институт, Москва, Россия

^{2, 3, 4, 5, 6, 7}Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

^{5, 7, 8}Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

¹wnikita37@gmail.com

²kamilla02@mail.ru

³fivanov@sfnu.ru

⁴epulikova@sfnu.ru

⁵vladimirchi@sfnu.ru

⁶usatova@sfnu.ru

⁷brenanzhelika@yandex.ru✉

⁸rudoy.d@gs.donstu.ru

Аннотация. Из почвенных образцов, отобранных в ризосферной зоне озимой пшеницы (*Triticum aestivum*), изолированы штаммы бактерий и идентифицированы с использованием секвенирования и филогенетического анализа гена 16S rRNA как представители родов *Raenibacillus* и *Bacillus*, после чего проведена оценка амило-, пектино- и целлюлолитической активности. Наиболее выраженная амилолитическая активность выявлена у бактерий рода *Raenibacillus*. Все изученные штаммы (*Bacillus* или *Raenibacillus*) демонстрировали высокую пектино- и целлюлолитическую активность. Они перспективны для разработки биопрепаратов и пробиотических препаратов, улучшающих рост растений, переваримость и эффективность использования растительных кормов в рационах животных для широкого спектра объектов животноводства и аквакультуры.

Ключевые слова: *Raenibacillus*, *Bacillus*, амилолитическая активность, пектинолитическая активность, целлюлолитическая активность, биопрепараты

Для цитирования: Васильченко Н.Г., Механцева К.В., Иванов Ф.Д., Пуликова Е.П., Чистяков В.А., Усатов Ал.В., Брень А.Б., Рудой Д.В. Биотехнологически перспективные свойства бактерий родов *Bacillus* и *Raenibacillus*, выделенных из ризосферы пшеницы озимой (*Triticum aestivum* L.). Часть 1 // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 77–89.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-76-30006, <https://rscf.ru/project/23-76-30006/>.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

© Васильченко Н.Г., Механцева К.В., Иванов Ф.Д., Пуликова Е.П., Чистяков В.А., Усатов Ал.В., Брень А.Б., Рудой Д.В., 2024

Original article

BIOTECHNOLOGICALLY PROSPECTIVE PROPERTIES OF BACTERIA OF THE GENERA *BACILLUS* AND *PAENIBACILLUS* ISOLATED FROM THE RHIZOSPHERE OF WINTER WHEAT (*TRITICUM AESTIVUM* L.). PART I

**N.G. Vasilchenko¹, K.V. Mekhantseva², F.D. Ivanov³, E.P. Pulikova⁴, V.A. Chistyakov⁵,
Al.V. Usatov⁶, A.B. Bren⁷, D.V. Rudoy⁸**

¹Almetyevsk State Oil Institute, Almetyevsk, Republic of Tatarstan, Russia

²Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russia

^{2, 3, 4, 5, 6, 7} Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

^{5, 7, 8} Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

¹wnikita37@gmail.com

²kamilla02@mail.ru

³fivanov@sfedu.ru

⁴epulikova@sfedu.ru

⁵vladimirchi@sfedu.ru

⁶usatova@sfedu.ru

⁷brenanzhelika@yandex.ru

⁸rudoy.d@gs.donstu.ru

Abstract. Bacterial strains were isolated from soil samples collected in the rhizosphere zone of winter wheat (*Triticum aestivum*) and identified using sequencing and phylogenetic analysis of the 16S rRNA gene as members of the genera *Paenibacillus* and *Bacillus*, after which amyolytic, pectinolytic, cellulolytic activity were evaluated. The highest amyolytic activity was detected in bacteria of the genus *Paenibacillus*. All the studied strains (*Bacillus* or *Paenibacillus*) showed high pectin and cellulolytic activity. The studied strains are promising for the development of biopreparations that improve plant growth, as well as those aimed at improving digestibility and increasing the efficiency of plant feed utilization in animal diets for a wide range of livestock and aquaculture facilities.

Keywords: *Paenibacillus*, *Bacillus*, amyolytic activity, pectinolytic activity, cellulolytic activity, biopreparations

For citation: Vasilchenko N.G., Mekhantseva K.V., Ivanov F.D., Pulikova E.P., Chistyakov V.A., Usatov A.V., Bren A.B., Rudoy D.V. Biotechnologically Prospective Properties of Bacteria of the Genera *Bacillus* and *Paenibacillus* Isolated from the Rhizosphere of Winter Wheat (*Triticum Aestivum* L.). Part. 1. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science*. 2024;(4-1):77-89. (In Russ.).

Acknowledgments: the study was supported by the Russian Science Foundation grant No. 23-76-30006, <https://rscf.ru/project/23-76-30006/>

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Зерновые культуры – это ключевая группа интенсивно возделываемых растений с максимально широким спектром применения в сельском хозяйстве и смежных областях, источник субстратов для получения важнейших продуктов питания человека, кормов для сельскохозяйственных животных и объектов аквакультуры. Задачей отрасли является повышение качества зерна и эффективности его производства, что достигается за счет совершенствования технологий. Выращивание зерновых требует применения большого количества минеральных удобрений, что имеет целый ряд негативных экологических последствий [1]. Кроме того, сопутствующие затраты во многом определяют стоимость зерна [2].

Экологически приемлемый и наиболее выгодный инструмент повышения эффективности удобрений – биопрепараты, включающие штаммы ризобактерий, улучшающих рост растений.

Для обозначения таких бактерий используется аббревиатура PGPR (Plant Growth-Promoting Rhizobacteria). Это – гетерогенная группа микроорганизмов, обитающих в ризосфере или на поверхности корней растений и способных интенсифицировать рост растения и защитить его от био- и абиотического стресса [3, 4].

Многие процессы, происходящие в ризосфере, регулируются взаимодействиями корней растения и микроорганизмов [5]. Последние синтезируют ряд гормонов, ферментов и других активных соединений, некоторые способны фиксировать азот. Кроме того, растения селективно сосуществуют с PGPR, используя для отбора бактерий корневые экссудаты. Они выделяются растением и в зависимости от количества и химического состава по-разному влияют на разнообразие бактерий ризосферы [6, 7]. Цель данного исследования – оценить пектино-, амило- и целлюлолитическую активность 22 штаммов, выделенных из ризосферы пшеницы озимой (*Triticum aestivum* L.)

Среди PGPR широко распространена способность гидролизовать сложные соединения. В [8–12] показано, что многие из них могут разлагать крахмал до олиго- и моносахаридов, в том числе мальтозы и глюкозы. Амилазы нужны растению для формирования пор, разрушения покровов патогена [13] и деструкции эндосперма. Поэтому бактерии, синтезирующие амилазы, могут использоваться для улучшения прорастания семян [14]. Среди них чаще всего встречаются бактерии рода *Bacillus* (*B. subtilis*, *B. stearothermophilus*, *B. macerans*, *B. megaterium* и *B. amylo-liquefaciens*) [15].

Еще одна группа гидролитических ферментов – пектиназы. В [16–20] показано, что некоторые PGPR, в том числе представители рода *Bacillus*, активно синтезируют пектиназы. Они используются клетками растения для построения клеточной стенки и размягчения тканей во время прорастания [21]. В промышленности пектиназы широко применяются в разных областях: продовольственной, биотопливной, текстильной [22].

PGPR часто синтезируют целлюлолитические ферменты [23] – экзо- и эндоферменты, разрушающие β -1,4-связи в молекуле целлюлозы [24]. Продуктами реакции являются глюкоза и целлобиоза. Глюкоза используется в качестве питательного вещества как универсальный источник энергии. Известно [25, 26], что многие PGPR, выделенные из области ризосферы растений разных экосистем – от соснового до тропического леса, способны продуцировать целлюлазы. В промышленности они нужны преимущественно для расщепления лигноцеллюлозы [24].

Рассмотренные свойства PGPR позволяют применять растения в качестве субстратов при производстве кормов для сельскохозяйственных животных и объектов аквакультуры. Активные комплексы литических ферментов микробного происхождения улучшают переваримость и повышают эффективность растительных кормов [27].

Материалы и методы

Получение штаммов бактерий. Использованные в работе штаммы бактерий были изолированы из почвенных образцов, отобранных на глубине 0–10 см в ризосферной зоне озимой пшеницы (*Triticum aestivum*), выращенной в Краснодарском крае, Воронежской и Курской областях.

Штаммы идентифицированы с использованием секвенирования и филогенетического анализа гена 16S rRNA как представители родов *Paenibacillus* (8 штаммов: K1.14, O1.27, O2.11, Pa 3.13, Pa 4.5, Pa 4.24, Pa 5.31, Pa 6.14) и *Bacillus* (12 штаммов: V 3.14, Pa 4.6, B 7/2, K11, K13, K14, K11/2, K12/2, K2 2/1, K17, K111, K112). Группа штаммов K1.14, O1.27, O2.11, Pa 3.13, Pa 4.5, Pa 4.24, Pa 5.31, Pa 6.14, V 3.14, Pa 4.6 обозначена как F1 [28]. Группа штаммов B 7/2, K11, K13, K14, K11/2, K12/2, K2 2/1, K17, K111, K112 (обозначена как F2) выделена из почв Воронежской и Курской областей.

Все штаммы культивировали при температуре 28–29 °С.

Оценка амилолитической активности. Для выявления способности штаммов гидролизовать крахмал использовалась питательная среда с добавлением крахмала следующего состава: панкреатический гидролизат кильки – 10,05 г, NaCl – 4,95 г, агар – 20 г, крахмал – 10 г.

Для тестирования суточные культуры анализируемых штаммов вносили в толщу питательной среды уколом бактериологической иглой в трех биологических повторностях на равном расстоянии друг от друга, чтобы минимизировать риск расползания культур на чашке. Культуры инкубировали в термостате в течение 48 ч при температуре 28–29 °С.

Контрастирование зон гидролиза выполняли с использованием раствора Люголя в модификации Грама (I₂ – 1 г, KI – 2 г, вода дистиллированная – 300 мл). Диаметр зон гидролиза измерялся штангенциркулем.

Оценка пектинолитической активности. Скрининг проводили методом агаровых блоков: питательную среду (вода дистиллированная – 1 л, пектин очищенный – 5 г, агар – 15 г, гидролизат дрожжевой – 1 г, KН₂РO₄ – 4 г, MgSO₄·7H₂O – 0,05 г, Na₂HPO₄·H₂O – 15 г, (NH₄)₂SO₄ – 2 г, CaCl₂ и Fe₂(SO₄)₃ – 0,001 г) с добавлением стрептомицина (0,4 г/л) разливали в чашки Петри из расчета 10–15 мл на чашку и после застывания вырезали блоки (диаметр – 12 мм, высота – около 3–4 мм) в трех биологических повторностях на каждой чашке на равном расстоянии друг от друга [29].

Суточные культуры бактерий инокулировали в жидкую питательную среду (картофельно-декстрозный бульон) и культивировали на протяжении 24 ч в шейкере-инкубаторе при температуре 28–29 °С и скорости вращения 220–240 об/мин.

Полученную суспензию встряхивали, отбирали 1 мл и центрифугировали на протяжении 5 мин, 8000 об/мин. Супернатант, содержащий пектинолитические ферменты, вносили в объеме 50 мкл в полученные ячейки в агаровых пластинах. Через 30 мин инкубации заливали раствором Люголя в модификации Грама (I₂ – 1 г, KI – 2 г, вода дистиллированная – 300 мл), диаметр зоны гидролиза измеряли штангенциркулем.

Оценка целлюлолитической активности. Для количественной оценки и сравнения активности целлюлаз исследуемых штаммов микроорганизмов использовался питательный агар [29] с микрокристаллической целлюлозой следующего состава: вода дистиллированная – 1 л, KН₂РO₄ – 1,0 г, NH₄NO₃ – 2,0 г, MgSO₄·7H₂O – 0,5 г, NaCl – 0,5 г, MnSO₄·H₂O – 0,01 г, FeSO₄·7H₂O – 0,01 г, CaCl₂ – 0,01 г, агар-агар – 30,0 г, микрокристаллическая целлюлоза – 8,0 г, дрожжевой экстракт – 0,1 г, pH – 7,0–7,2.

Биомасса культур штаммов бактерий, инкубированных 18–24 ч на картофельно-декстрозном агаре, переносилась методом укола бактериологической иглой на чашки Петри с целлюлозным агаром в трех биологических повторностях на равном расстоянии друг от друга. Инокулированные чашки инкубировались 72 ч при температуре 28–29 °С.

Для визуализации степени гидролиза целлюлозы на поверхность питательной среды наносили свежеприготовленный раствор Люголя (I₂ – 1 г, KI – 2 г, вода дистиллированная – 300 мл) в модификации Грама для выявления зон гидролиза целлюлозы.

Статистическая обработка. Статистическую обработку полученных данных проводили с использованием критерия Манна – Уитни, обсчеты и визуализацию – с использованием пакетов tidy, dplyr, ggplot2 в R.

Результаты и обсуждение

Оценка амилолитической активности. Результаты оценки амилолитической активности представлены на рис. 1. Штаммы рода *Paenibacillus* K1.14 (16 мм), O2.11 (13,34 мм), Pa 4.5 (13,66 мм), Pa 4.24 (12,66 мм), Pa 5.31 (12,66 мм) показали наиболее высокую амилолитическую активность. В исследованиях представители данного рода часто демонстрируют высокие показатели амилазной активности – диаметр зоны просветления составил более 30 мм у штамма *Paenibacillus amylopliticus* A12, полученного с поверхности клубня картофеля [30].

Среди исследованных штаммов рода *Bacillus* наиболее высокую амилолитическую активность продемонстрировал штамм KII2/2 – 9,34 мм, что соотносится с уже имеющимися данными: так, по данным [9], радиус зон гидролиза крахмала *Bacillus subtilis inaquosorum* (PR-1), выделенного из листьев, стеблей и корней *Potentilla fulgens*, составил максимум 6 мм. Для штаммов F1 наблюдаются большие значения диаметра зоны гидролиза, чем для F2, разница статистически значимая. Также было проведено сравнение амилолитической активности для штаммов рода *Paenibacillus* и *Bacillus*. Согласно рис. 2, значения диаметра зоны гидролиза крахмала бактерий рода *Paenibacillus* значительно превышают таковые для рода *Bacillus*. Медиана диаметра зоны гидролиза штаммов рода *Paenibacillus* в 2,2 раза больше, чем рода *Bacillus*. Для всех штаммов, за исключением KII/2 (9,34 мм), диаметр составляет от 4 мм для B 7/2 до 7,34 мм для штамма KI3, в то время как для штаммов рода *Paenibacillus* – от 8,66 мм для P 6.14 до 16 мм для K1.14.

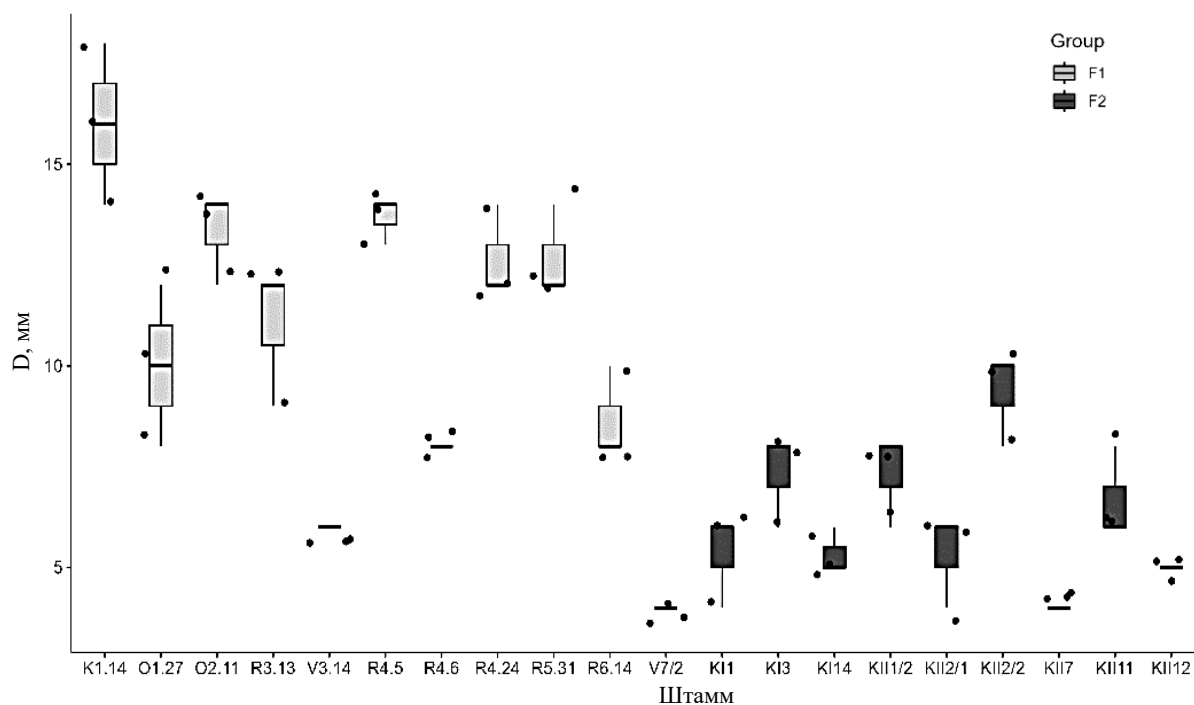


Рис. 1. Оценка амилолитической активности исследуемых штаммов по значениям диаметра зон гидролиза крахмала / Fig. 1. Evaluation of the strains' amyolytic activity based on the diameter values of the starch hydrolysis zones

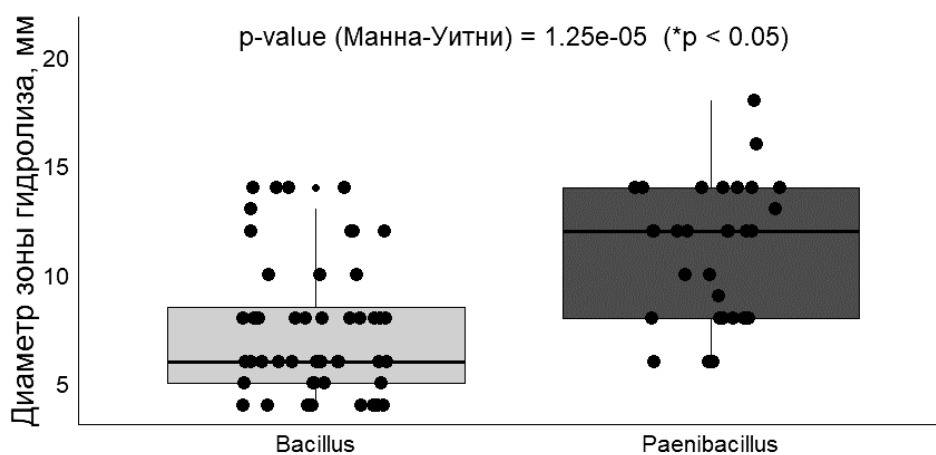


Рис. 2. Сравнительная оценка амилолитической активности штаммов родов *Paenibacillus* и рода *Bacillus* / Fig. 2. Comparative assessment of the amyolytic activity of *Paenibacillus* and *Bacillus* strains

Такие различия входят в рамки нормы, так как способность продуцировать амилазы во многом зависит от условия культивирования и штамма. Например, из 8 штаммов *Bacillus* и *Paenibacillus*, полученных из бытовых сточных вод, разброс амилолитической активности наблюдается для обоих родов [31], причем для сравнения отбирались штаммы, имеющие зону просветления на среде с добавлением крахмала (более 25 мм), что является достаточно высоким показателем. *Paenibacillus polymyxa* АРЕС136 и *Bacillus subtilis* АРЕС170, полученные из почвы яблоневых садов, показали одинаковые зоны просветления (диаметр более 30 мм) [32]. Наименьшей амилолитической активностью обладали штамм Ра 6.14 (8,66 мм) среди *Paenibacillus* spp. и К117 (4 мм) среди *Bacillus* spp.

Оценка пектинолитической активности. Результаты оценки пектинолитической активности представлены на рис. 3. Наиболее высокую пектинолитическую активность демонстрируют штаммы Pa 4.5 (13,66 мм), Pa 4.24 (12,66 мм) – представители рода *Paenibacillus* и KI3 (13,34 мм), КП2/2 (13,34 мм), КП12 (13,34 мм) – рода *Bacillus*.

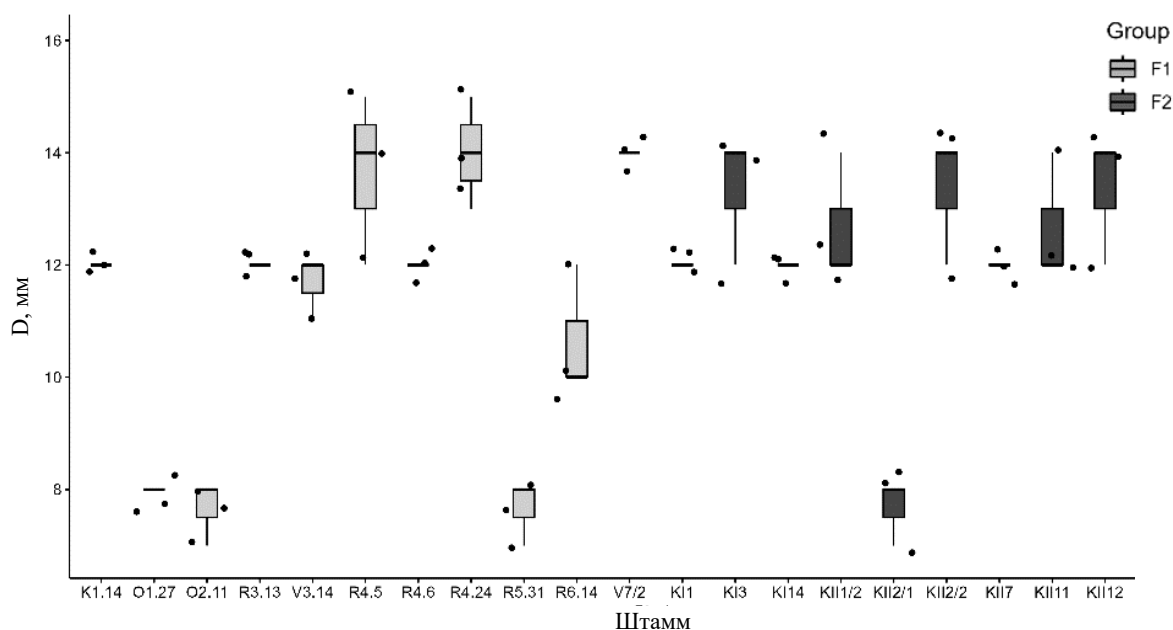


Рис. 3. Оценка пектинолитической активности исследуемых штаммов по значениям диаметра зон гидролиза пектина / Fig. 3. Evaluation of the strains' pectinolytic activity based on the diameter of pectin hydrolysis zones

Между пектинолитической активностью штаммов F1 и F2 нет статистически значимых различий. Сравнение пектинолитической активности штаммов, относящихся к родам *Bacillus* и *Paenibacillus*, представлено на рис. 4.

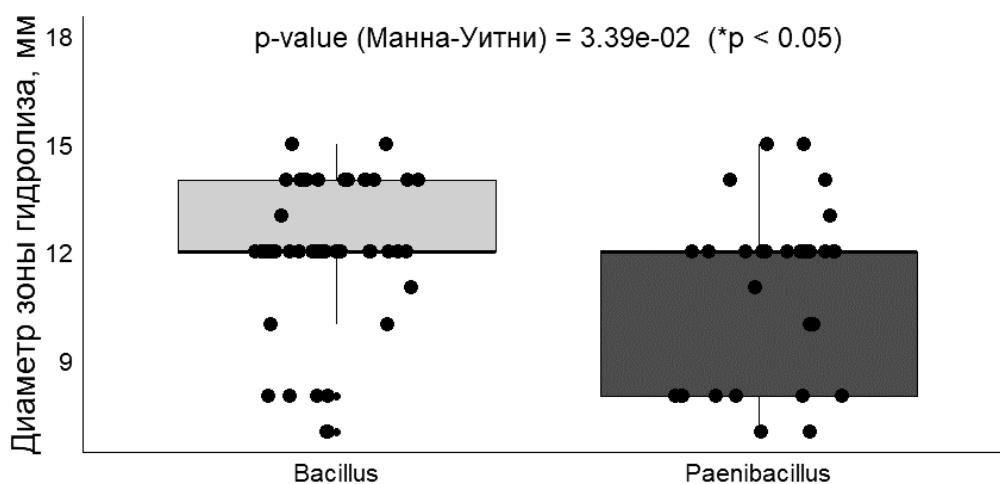


Рис. 4. Сравнительная оценка пектинолитической активности штаммов рода *Paenibacillus* и рода *Bacillus* / Fig. 4. Comparative assessment of the pectinolytic activity of *Paenibacillus* and *Bacillus* strains

Медианы для групп штаммов родов *Bacillus* и *Paenibacillus* близки и составляют около 12 мм. Для рода *Paenibacillus* наблюдается смещение показателя к верхнему квартилю, для *Bacillus* – к нижнему. Таким образом, невозможно определить зависимость пектинолитической активности от рода для исследуемых штаммов. Однако заметно, что в обеих группах диаметры зон гидролиза

пектина позволяют отнести большую часть штаммов к очень хорошим пектинолитикам, поскольку штаммы, выделенные из почвы и разлагающихся растений, классифицируют как очень хорошие продуценты пектиназ при наличии зон гидролиза диаметром не менее 15 мм, хорошие – 10 мм, слабые продуценты – 5 мм [19]. Согласно данному разделению, практически все исследуемые штаммы относятся к хорошим продуцентам.

Полученные результаты согласуются с предыдущими исследованиями других авторов: представители бактерий рода *Bacillus* известны как активные продуценты пектиназ [20]. *Bacillus flexus* JBST22, полученный из ризосферы *Andrographis paniculata*, определен как хороший продуцент (диаметр зоны гидролиза – около 30 мм) [16]. *Bacillus subtilis* и *Bacillus cereus*, выделенные из зоны ризосферы и с корней облепихи крушиновидной (*Hippophae rhamnoides* L.), продемонстрировали пектинолитическую и целлюлолитическую активность [33].

Некоторые бактерии рода *Paenibacillus* зоны ризосферы обладают способностью разлагать пектин. Например, штамм *Paenibacillus* sp. B2, выделенный с *Sorghum bicolor* L., имел диаметр зоны гидролиза пектина 18 мм [33]. С другой стороны, эта способность бактерий зависит от разных факторов, включая вид растений. Некоторые штаммы *Bacillus* spp., *Paenibacillus* spp., полученные из ризосферы, вообще не имели зон гидролиза на среде с добавлением пектина [34].

Оценка целлюлолитической активности. Результаты оценки целлюлолитической активности представлены на рис. 5. Среди исследованных штаммов наиболее высоким показателем активности целлюлаз отличается Pa 4.24 (27 мм), относящийся к роду *Paenibacillus*. Большая часть штаммов *Bacillus* имеет схожие уровни целлюлолитической активности, за исключением КП2/2, КП7, КП11, у которых более низкий показатель. Разницы между F1 и F2 в данном случае не наблюдается.

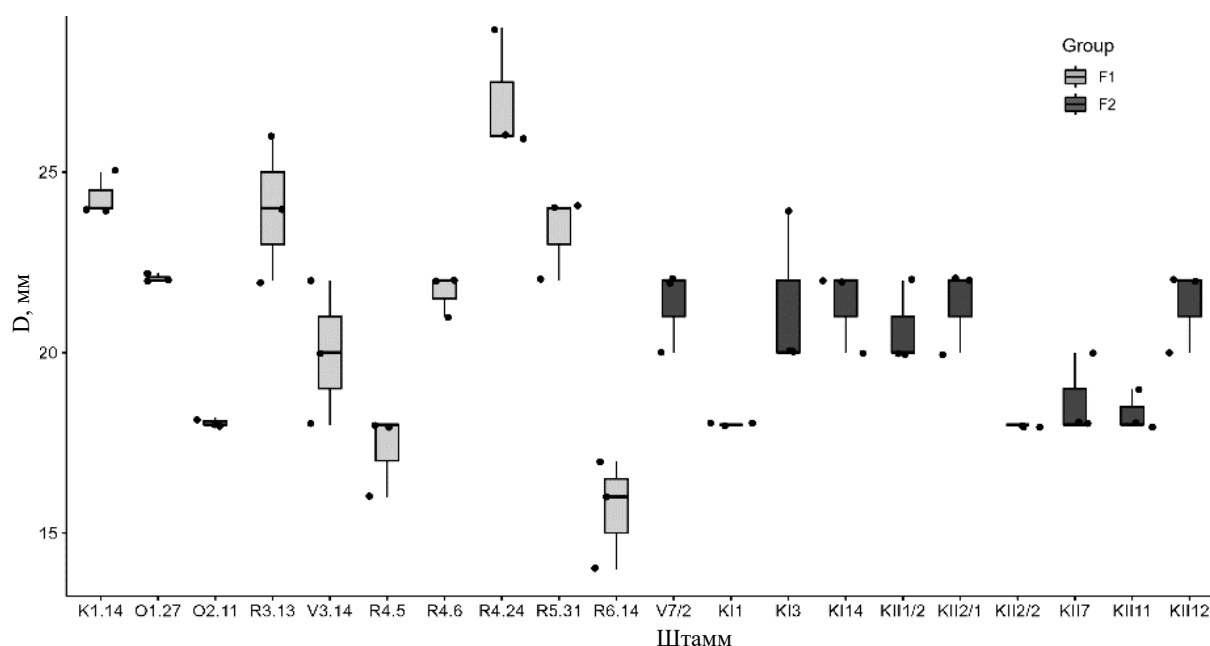


Рис. 5. Оценка целлюлолитической активности исследуемых штаммов по значениям диаметра зон гидролиза целлюлозы / Fig. 5. Evaluation of the strains' cellulolytic activity based on the diameter of cellulose hydrolysis zones

Сравнение целлюлолитической активности штаммов, относящихся к родам *Bacillus* и *Paenibacillus*, представлено на рис. 6. Штаммы обоих родов обладают схожей, высокой целлюлолитической активностью – медианы групп *Paenibacillus* и *Bacillus* отличаются всего в 1,08 раза.

Результаты соотносятся с опубликованными исследованиями. *Bacillus* spp. [35] и *Paenibacillus* spp., полученные из зоны ризосферы, часто демонстрируют целлюлолитическую активность. Из 24 штаммов *Bacillus*, выделенных из ризопланы сахарного тростника, диаметр зоны гидролиза некоторых составил 22,3; 21,3; 21; 20 мм [31]. Из множества штаммов, полученных из различных экосистем, 5 из них, показавших наибольшую целлюлолитическую активность, относились к роду *Bacillus* [36].

Результаты оценки биохимических активностей представлены в таблице.

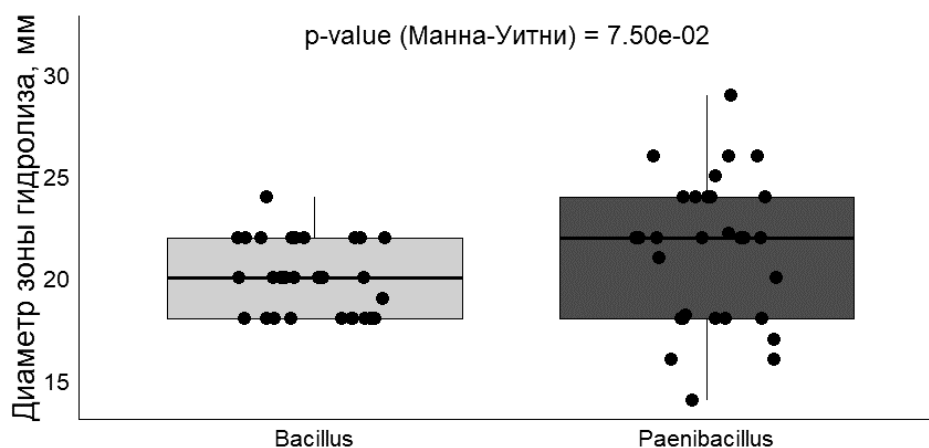


Рис. 6. Сравнительная оценка целлюлолитической активности штаммов родов *Paenibacillus* и *Bacillus* / Fig. 6. Comparative assessment of cellulolytic activity of the *Paenibacillus* and *Bacillus* strains

Амило-, пектино-, целлюлолитическая активность, способность синтезировать сидерофоры и ИУК и способность к фосфатмобилизации исследованных штаммов и бактерий коммерческого штамма «Фосфатовит» / Amylolytic, pectinolytic, cellulolytic activities, ability to synthesize siderophores and IAA, and the ability to phosphatmobilization of the studied bacterial strains and the commercial strain “Phosphatovit”

Штамм		Диаметр зоны гидролиза, мм		
		Крахмал	Пектин	Целлюлоза
<i>Paenibacillus</i>	К 1.14	16	12	24,34
	O1.27	10	8	22,06
	O2.11	13,34	7,66	18,06
	Pa 3.13	11	12	24
	Pa 4.5	13,66	13,66	17,34
	Pa 4.24	12,66	12	27
	Pa 5.31	12,66	14	23,34
	Pa 6.14	8,66	7,66	15,66
<i>Bacillus</i>	V 3.14	6	11,66	20
	Pa 4.6	8	10,66	21,66
	B 7/2	4	14	21,34
	KП1	5,34	12	18
	KП3	7,34	13,34	21,34
	KП14	5,34	12	21,34
	KП1/2	7,34	12,66	20,66
	KП2/1	5,34	7,66	21,34
	KП2/2	9,34	13,34	18
	KП7	4	12	18,66
	KП11	6,66	12,66	18,34
	KП12	5	13,34	21,34

Типичные результаты для демонстрирующих и не демонстрирующих каждую активность штаммов показаны на рис. 7. Среди гидролитических активностей наиболее выраженной оказалась целлюлолитическая – максимальный диаметр зоны гидролиза – 24,34 мм (К 1.14).

Штаммы родов *Paenibacillus* (К 1.14, Pa 4.5, Pa 4.24, Pa 5.31) и *Bacillus* (Pa 4.6, KП3, KП1/2, KП2/2) обладают всеми исследованными активностями. Пектинолитическая оказалась наибольшей у штаммов Pa 4.5, KП3, KП1/2, KП11, KП12, а амилолитическая – у O2.11, Pa 4.5, Pa 4.24, Pa 5.31. Штаммы К 1.14, O1.27, Pa 5.31, Pa 4.6, B 7/2, KП14, KП1/2, KП2/1 демонстрируют значительную способность синтезировать целлюлазы. У всех штаммов оказалась наиболее ярко выражена целлюлолитическая активность.

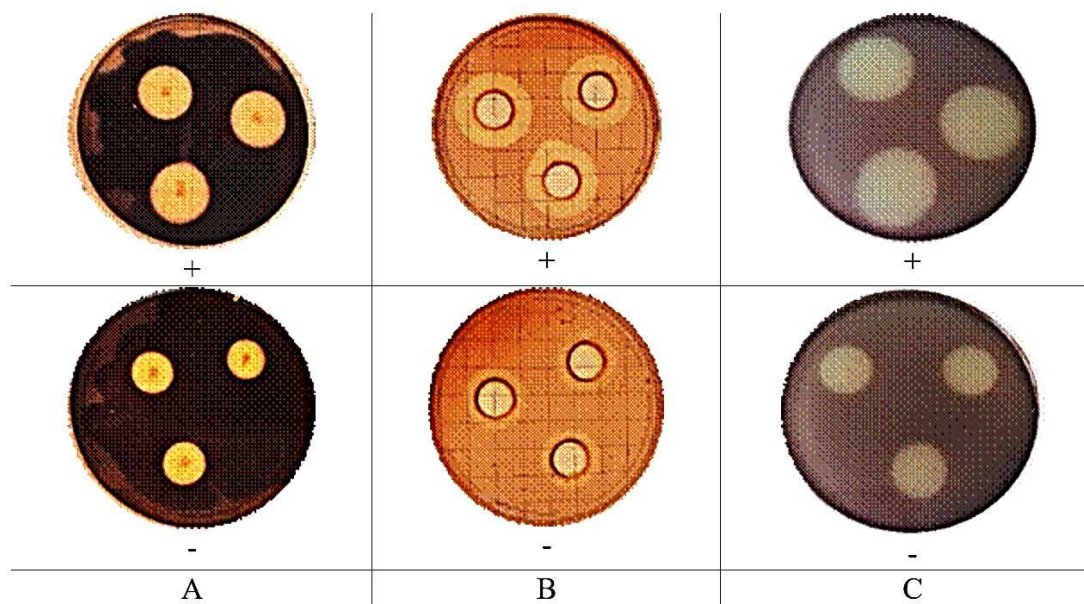


Рис. 7. Штаммы, демонстрирующие (+) или не демонстрирующие (-) способность гидролизовать крахмал – А; гидролизовать пектин – В; гидролизовать целлюлозу – С / Fig. 7. Strains that show (+) or do not show (-) the ability to hydrolyze starch - A; hydrolyze pectin - B; hydrolyze cellulose - C

Заключение

Наиболее высокую амилолитическую активность продемонстрировали 5 штаммов рода *Paenibacillus* (максимальный диаметр зоны гидролиза крахмала – 16 мм для К 1.14). В целом представители рода *Paenibacillus* имели более высокую амилолитическую активность, чем представители рода *Bacillus*. Штамм Ра 4.5, относящийся к роду *Paenibacillus*, обладал наиболее выраженной пектинолитической активностью (диаметр зоны гидролиза пектина – 13,66 мм). Несколько штаммов рода *Bacillus* показали схожий результат – 13,34 мм. Целлюлолитическую активность изученные штаммы демонстрировали наиболее ярко, штамм Ра 4.24 (диаметр зоны гидролиза целлюлозы – 27 мм) имел наиболее высокий показатель и относился к роду *Paenibacillus*. Зависимости активности пектиназ и целлюлаз от рода (*Bacillus* или *Paenibacillus*) выявлено не было.

Эти результаты сходны с полученными в аналогичных исследованиях. Известно, что представители рода *Bacillus* обладают набором важных в биотехнологии и сельском хозяйстве характеристик. Как правило, PGPR демонстрируют несколько ярко выраженных биохимических активностей одновременно; так, 4 штамма имели одновременно 3 активности.

Данные штаммы могут применяться в качестве основы для биопрепарата, улучшающего рост ряда зерновых сельскохозяйственных культур. Наличие комплекса литических ферментов может быть использовано при разработке пробиотических препаратов для широкого спектра объектов животноводства и аквакультуры [37]. Изучение этих вопросов станет предметом наших дальнейших исследований.

Список источников

1. Chandini R.K., Kumar R., Om, P. The Impact of Chemical Fertilizers on our Environment and Ecosystem // Research Trends in Environmental Sciences. 2019. № 6. P. 71–86.
2. Poutanen K.S., Kärnlund A.O., Gómez-Gallego C., Johansson D.P., Scheers N.M., Marklinder I.M., Landberg R. Grains - a major source of sustainable protein for health // Nutrition Reviews. 2022. Vol. 80, № 6. P. 1648–1663.
3. Souza R., Ambrosini A., Passaglia L.M.P. Plant growth-promoting bacteria as inoculants in agricultural soils // Genetics and Molecular Biology. 2015. Vol. 38. P. 401–419.
4. Lopes M.J. S., Dias-Filho M.B., Gurgel E.S. Successful plant growth-promoting microbes: inoculation methods and abiotic factors // Frontiers in Sustainable Food Systems. 2021. Vol. 5. P. 606454.
5. Lynch J.M. The rhizosphere - form and function // Applied Soil Ecology. 1994. Vol. 1, № 3. P. 193–198.

6. Donn S., Kirkegaard J.A., Perera G., Richardson A.E., Watt M. Evolution of bacterial communities in the wheat crop rhizosphere // *Environmental Microbiology*. 2015. Vol. 17, № 3. P. 610–621.
7. Kawasaki A., Donn S., Ryan P.R., Mathesius U., Devilla R., Jones A., Watt M. Microbiome and exudates of the root and rhizosphere of *Brachypodium distachyon*, a model for wheat // *PLoS ONE*. 2016. Vol. 11, № 10. Art. e0164533.
8. Bach E., Bach E., dos Santos Seger G.D., de Carvalho Fernandes G., Lisboa B.B., Passaglia L.M. Evaluation of biological control and rhizosphere competence of plant growth promoting bacteria // *Applied Soil Ecology*. 2016. Vol. 99. P. 141–149.
9. Barman D., Dkhar M. S. Amylolytic activity and its parametric optimization of an endophytic bacterium *Bacillus subtilis* with an ethno-medicinal origin // *Biologia*. 2015. Vol. 70. P. 283–293.
10. Grata K., Nabrdalik M., Latala A., Rósných W., Węglą Ż., Aktywność N. Effect of different carbon sources on amylolytic activity of *Bacillus* spp. isolated from natural environment // *Proceedings of ECOpole*. 2008. Vol. 2, № 2. P. 321–324.
11. Rosahdi T., Azizah T. N., Hidayati F., Syifa R., Khoerunnisa R., Lenggana G., Hafsari A. Characterization of A Raw Starch Degrading Alpha Amylase from the Rhizosphere Soil Citatah Karst Region *Bacillus* sp. K2Br5 // *Proceedings of the 1st International Conference on Islam, Science and Technology*. Bandung, Indonesia, 2019.
12. Vijayalakshmi K., Abha S., Chander P. Isolation and characterization of *Bacillus subtilis* KC3 for amylolytic activity // *International J. of Bioscience, Biochemistry and Bioinformatics*. 2012. Vol. 2, № 5. P. 336–341.
13. Islam S., Akanda A.M., Prova A., Islam M.T., Hossain M.M. Isolation and identification of plant growth promoting rhizobacteria from cucumber rhizosphere and their effect on plant growth promotion and disease suppression // *Frontiers in Microbiology*. 2016. Vol. 6. P. 1360.
14. Carro L., Menéndez E. Knock, knock-let the bacteria in: Enzymatic potential of plant associated bacteria // *Molecular aspects of plant beneficial microbes in agriculture*. Academic Press, 2020. P. 169–178.
15. Elyasi Far B., Ahmadi Y., Yari Khosroshahi A., Dilmaghani A. Microbial Alpha-Amylase Production: Progress, Challenges and Perspectives // *Adv. Pharm. Bull.* 2020. Vol. 10, № 3. P. 350–358.
16. Kabir M.S., Tasmim T. Isolation of pectinase producing bacteria from the rhizosphere of *Andrographis paniculata* nees and 16S rRNA gene sequence comparison of some potential strains // *Advances in Microbiology*. 2019. Vol. 9, № 1. P. 1–13.
17. Ouattara H.G., Koffi B.L., Karou G.T., Sangaré A., Niamke S.L., Diopoh J. K. Implication of *Bacillus* sp. in the production of pectinolytic enzymes during cocoa fermentation // *World J. of Microbiology and Biotechnology*. 2008. Vol. 24, P. 1753–1760.
18. Reetha S., Selvakumar G., Bhuvaneshwari G., Thamizhiniyan P., Ravimycin T. Screening of cellulase and pectinase by using *Pseudomonas fluorescens* and *Bacillus subtilis* // *International Letters of Natural Sciences*. 2014. Vol. 13. P. 75–80.
19. Soares M.M., Silva R., Gomes E. Seleção de linhagens bacterianas para atividade pectinolítica: caracterização das poligalacturonases produzidas por *Bacillus* sp. // *Revista de Microbiologia*. 1999. Vol. 30. P. 299–303.
20. Torimiro N., Okonji R.E. A comparative study of pectinolytic enzyme production by *Bacillus* species // *African J. of Biotechnology*. 2013. Vol. 12, № 46. P. 6498–6503.
21. Rombouts F.M., Pilnik W. Pectinases and other cell-wall degrading enzymes of industrial importance // *Symbiosis*. 1986. Vol. 2. P. 79–89.
22. Bhardwaj V., Degrassi G., Bhardwaj R.K. Microbial pectinases and their applications in industries: a review // *Polymer*. 2017. Vol. 4, № 8. P. 829–836.
23. Malik W.A., Javed S. Biochemical characterization of cellulase from *Bacillus subtilis* strain and its effect on digestibility and structural modifications of lignocellulose rich biomass // *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology*. 2021. Vol. 9. P. 800265.
24. Jayasekara S., Ratnayake R. Microbial cellulases: an overview and applications // *Cellulose*. 2019. Vol. 22, № 92. P. 10.
25. Kim Y.K., Lee S.C., Cho Y.Y., Oh H.J., Ko Y.H. Isolation of cellulolytic *Bacillus subtilis* strains from agricultural environments // *International Scholarly Research Notices*. 2012. № 1. P. 650563.
26. Kumar R., Prakash O. Chapter-5 the impact of chemical fertilizers on our environment and ecosystem // *Chief Ed.* 2019. Vol. 35, № 69. P. 1173–1189.
27. Sun Y., Wynn-Edwards C., Trull T.W., Ellwood M. The Role of Acantharia in Southern Ocean Strontium Cycling and Carbon Export: Insights from Dissolved Strontium Concentrations and Seasonal Flux Patterns // *Global Biogeochemical Cycles*. 2024. Vol. 38, № 10.
28. Патент № 2724464 РФ, МПК51 C12N 1/20; АО1N 63/100, А01С 1/06. Штаммы, биопрепарат, способ получения биопрепарата и способ биологической защиты сельскохозяйственных культур от фузариоза / А.В. Усатов, Е.В. Празднова, Н.Г. Васильченко, О.А. Усатова, В.А. Чистяков, А.Б. Брень, А.В. Горовцов, М.С. Мазанко Заявл. 02.12.2019; Опубл. 23.06.2020.

29. Hossain M., Ahammed A., Sobuj S., Shifat S., Somadder P. Cellulase Producing Bacteria Isolation, Screening and Media Optimization from Local Soil Sample // *American J. of Microbiological Research*. 2021. Vol. 9. P. 62–74.
30. Yahyaoui A., Oueslati M., Motyka-Pomagruk A., Kaczynska N., Sledz W., Tarhouni B., Sadfi-Zouaoui N. Characterisation of pectinolytic *Bacillus pumilus* and *Paenibacillus amyloliticus* strains, new pathogens of potato in Tunisia // *Agriculture*. 2023. Vol 13, № 6. P. 1275.
31. Sekhar C.V., Varma K.P., Swapna G., Vamsi K., Lakshmi B.M. Cellulolytic Activity of *Bacillus* and *Pseudomonas* species isolated from Sugarcane Rhizosphere and its Correlation with Carbohydrate Utilization // *Biological Forum – An International J.* 2022. Vol. 14, № 2. P. 240–246.
32. Kim Y. S., Balaraju K., Jeon Y. Effects of rhizobacteria *Paenibacillus polymyxa* APEC136 and *Bacillus subtilis* APEC170 on biocontrol of postharvest pathogens of apple fruits // *J. of Zhejiang University. Science. B.* 2016. Vol. 17, № 12. P. 931.
33. Bhadreacha P., Bala M., Khasa Y.P., Arshi A., Singh J., Kumar M. Hippophae rhamnoides L. rhizobacteria exhibit diversified cellulase and pectinase activities // *Physiology and Molecular Biology of Plants*. 2020. Vol. 26. P. 1075–1085.
34. Budi S.W., Van Tuinen D., Arnould C., Dumas-Gaudot E., Gianinazzi-Pearson V., Gianinazzi S. Hydrolytic enzyme activity of *Paenibacillus* sp. strain B2 and effects of the antagonistic bacterium on cell integrity of two soil-borne pathogenic fungi // *Applied Soil Ecology*. 2000. Vol. 15, № 2. P. 191–199.
35. Manhar A.K., Bashir Y., Saikia D., Nath D., Gupta K., Konwar B.K., Mandal M. Cellulolytic potential of probiotic *Bacillus Subtilis* AMS6 isolated from traditional fermented soybean (Churpi): An in vitro study with regards to application as an animal feed additive // *Microbiological Research*. 2016. Vol. 186. P. 62–70.
36. Balla A., Silini A., Cherif-Silini H., Bouket A.C., Boudechicha A., Luptakova L., Belbahri L. Screening of cellulolytic bacteria from various ecosystems and their cellulases production under multi-stress conditions // *Catalysts*. 2022. Vol. 12, № 7. P. 769.
37. El-Saadony M.T., Alagawany M., Patra A.K., Kar I., Tiwari R., Dawood M. A.O., Dhama K., Abdel-Latif H. M. R. The functionality of probiotics in aquaculture: An overview // *Fish Shellfish Immunol*. 2021. Vol. 117, № 36. P. 52.

References

1. Chandini R.K., Kumar R., Om P. The Impact of Chemical Fertilizers on our Environment and Ecosystem. *Research Trends in Environmental Sciences*. 2019;(6):71-86.
2. Poutanen K. S., Kärllund A. O., Gómez-Gallego C., Johansson D. P., Scheers N. M., Marklinder I. M., Landberg R. Grains-a major source of sustainable protein for health. *Nutrition Reviews*. 2022;80(6):1648-1663.
3. Souza R., Ambrosini A., Passaglia L. M. P. Plant growth-promoting bacteria as inoculants in agricultural soils. *Genetics and Molecular Biology*. 2015;38:401-419.
4. Lopes M. J. S., Dias-Filho M. B., Gurgel E. S. Successful plant growth-promoting microbes: inoculation methods and abiotic factors. *Frontiers in Sustainable Food Systems*. 2021;5:606454.
5. Lynch J.M. The rhizosphere - form and function. *Applied Soil Ecology*. 1994;1(3):193-198.
6. Donn S., Kirkegaard J. A., Perera G., Richardson A. E., Watt M. Evolution of bacterial communities in the wheat crop rhizosphere. *Environmental Microbiology*. 2015;17(3):610-621.
7. Kawasaki A., Donn S., Ryan P. R., Mathesius U., Devilla R., Jones A., Watt M. Microbiome and exudates of the root and rhizosphere of *Brachypodium distachyon*, a model for wheat. *PLoS One*. 2016;11(10):e0164533.
8. Bach E., Bach, E., dos Santos Seger G. D., de Carvalho Fernandes G., Lisboa B. B., Passaglia L. M. Evaluation of biological control and rhizosphere competence of plant growth promoting bacteria. *Applied Soil Ecology*. 2016;99:141-149.
9. Barman D., Dkhar M. S. Amylolytic activity and its parametric optimization of an endophytic bacterium *Bacillus subtilis* with an ethno-medicinal origin. *Biologia*. 2015;70:283-293.
10. Grata K., Nabrdalik M., Latała A., Róśnych W., Węglą Ż., Aktywność N. Effect of different carbon sources on amylolytic activity of *Bacillus* spp. isolated from natural environment. *Proceedings of ECOpole*. 2008;2(2):321-324.
11. Rosahdi T., Azizah T. N., Hidayati F., Syifa R., Khoerunnisa R., Lenggana G., Hafsari A. Characterization of A Raw Starch Degrading Alpha Amylase From The Rhizosphere Soil Citatah Karst Region *Bacillus* sp. K2Br5. *Proceedings of the 1st International Conference on Islam, Science and Technology*. Bandung, Indonesia, 2021.
12. Vijayalakshmi K., Abha S., Chander P. Isolation and characterization of *Bacillus subtilis* KC3 for amylolytic activity. *International Journal of Bioscience, Biochemistry and Bioinformatics*. 2012;2(5):336-341.
13. Islam S., Akanda A. M., Prova A., Islam M. T., Hossain M. M. Isolation and identification of plant growth promoting rhizobacteria from cucumber rhizosphere and their effect on plant growth promotion and disease suppression. *Frontiers in Microbiology*. 2016;6:1360.
14. Carro L., Menéndez E. Knock, knock-let the bacteria in: Enzymatic potential of plant associated bacteria. *Molecular aspects of plant beneficial microbes in agriculture*. Academic Press, 2020:169-178.

15. Elyasi Far B., Ahmadi Y., Yari Khosroshahi A., Dilmaghani A. Microbial Alpha-Amylase Production: Progress, Challenges and Perspectives. *Adv. Pharm. Bull.* 2020;10(3):350-358.
16. Kabir M. S., Tasmim T. Isolation of pectinase producing bacteria from the rhizosphere of *Andrographis paniculata* nees and 16S rRNA gene sequence comparison of some potential strains. *Advances in Microbiology.* 2019;9(1):1-13.
17. Ouattara H. G., Koffi B. L., Karou G. T., Sangaré A., Niamke S. L., Diopoh J. K. Implication of *Bacillus* sp. in the production of pectinolytic enzymes during cocoa fermentation. *World Journal of Microbiology and Biotechnology.* 2008;24:1753-1760.
18. Reetha S., Selvakumar G., Bhuvaneshwari G., Thamizhiniyan P., Ravimycin T. Screening of cellulase and pectinase by using *Pseudomonas fluorescens* and *Bacillus subtilis*. *International Letters of Natural Sciences.* 2014;13:75-80.
19. Soares M. M., Silva R., Gomes E. Seleção de linhagens bacterianas para atividade pectinolítica: caracterização das poligalacturonases produzidas por *Bacillus* sp. *Revista de Microbiologia.* 1999;30:299-303.
20. Torimiro N., Okonji R. E. A comparative study of pectinolytic enzyme production by *Bacillus* species. *African Journal of Biotechnology.* 2013;12(46):6498-6503.
21. Rombouts F. M., Pilnik W. Pectinases and other cell-wall degrading enzymes of industrial importance. *Symbiosis.* 1986;2;79-89.
22. Bhardwaj V., Degrassi G., Bhardwaj R. K. Microbial pectinases and their applications in industries: a review. *Polymer.* 2017;4(8):829-836.
23. Malik W. A., Javed S. Biochemical characterization of cellulase from *Bacillus subtilis* strain and its effect on digestibility and structural modifications of lignocellulose rich biomass. *Frontiers in Bioengineering and Biotechnology.* 2021;9:800265.
24. Jayasekara S., Ratnayake R. Microbial cellulases: an overview and applications. *Cellulose.* 2019;22(92):10.
25. Kim Y. K., Lee S. C., Cho Y. Y., Oh H. J., Ko Y. H. Isolation of cellulolytic *Bacillus subtilis* strains from agricultural environments. *International Scholarly Research Notices.* 2012;(1):650563.
26. Kumar R., Prakash O. Chapter-5 the impact of chemical fertilizers on our environment and ecosystem. *Chief Ed.* 2019;35(69):1173-1189.
27. Sun Y., Wynn-Edwards C., Trull T.W. The Role of Acantharia in Southern Ocean Strontium Cycling and Carbon Export: Insights from Dissolved Strontium Concentrations and Seasonal Flux Patterns. *Global Biogeochemical Cycles.* 2024;38(10).
28. Usatov A.V., Prazdnova E.V., Vasilchenko N.G., Usatova O.A., Chistyakov V.A., Bren A.B., Gorovtsov A.V., Mazanko M.S., Limited Liability Company "Agrofirm 'Urozhaynaya'". *Strains biopreparation, method of obtaining a biopreparation and method of biological protection of agricultural crops from fusarium.* Patent No. 2724464 RF, IPC51 C12N 1/20; AO1N 63/100, A01C 1/06. 2019139147; Appl. December 2, 2019; Publ. June 23, 2020, Bulletin No. 18. (In Russ.).
29. Hossain M., Ahammed A., Sobuj S., Shifat S., Somadder P. Cellulase Producing Bacteria Isolation, Screening and Media Optimization from Local Soil Sample. *American Journal of Microbiological Research.* 2021;9:62-74.
30. Yahyaoui A., Oueslati M., Motyka-Pomagruk A., Kaczynska N., Sledz W., Tarhouni B., Sadfi-Zouaoui N. Characterisation of Pectinolytic *Bacillus Pumilus* and *Paenibacillus Amyloliticus* Strains, new Pathogens of Potato in Tunisia. *Agriculture.* 2023. 13(6):1275.
31. Sekhar C. V., Varma K. P., Swapna G., Vamsi K., Lakshmi B. M. Cellulolytic Activity of *Bacillus* and *Pseudomonas* species isolated from Sugarcane Rhizoplane and its Correlation with Carbohydrate Utilization. *Biological Forum - An International Journal.* 2022;14(2):240-246.
32. Kim Y. S., Balaraju K., Jeon Y. Effects of rhizobacteria *Paenibacillus polymyxa* APEC136 and *Bacillus subtilis* APEC170 on biocontrol of postharvest pathogens of apple fruits. *Journal of Zhejiang University. Science. B.* 2016;17(12):931.
33. Bhadrecha P., Bala M., Khasa Y. P., Arshi A., Singh J., Kumar M. *Hippophae rhamnoides* L. rhizobacteria exhibit diversified cellulase and pectinase activities. *Physiology and Molecular Biology of Plants.* 2020;26:1075-1085.
34. Budi S. W., Van Tuinen D., Arnould C., Dumas-Gaudot E., Gianinazzi-Pearson V., Gianinazzi S. Hydrolytic enzyme activity of *Paenibacillus* sp. strain B2 and effects of the antagonistic bacterium on cell integrity of two soil-borne pathogenic fungi. *Applied Soil Ecology.* 2000;15(2):191-199.
35. Manhar A. K., Bashir Y., Saikia D., Nath D., Gupta K., Konwar B. K., Mandal M. Cellulolytic potential of probiotic *Bacillus Subtilis* AMS6 isolated from traditional fermented soybean (Churpi): An in vitro study with regards to application as an animal feed additive. *Microbiological Research.* 2016;186:62-70.
36. Balla A., Silini A., Cherif-Silini H., Bouket A. C., Boudechicha A., Luptakova L., Belbahri L. Screening of cellulolytic bacteria from various ecosystems and their cellulases production under multi-stress conditions. *Catalysts.* 2022;12(7):769.

37. El-Saadony M. T., Alagawany M., Patra A.K., Kar I., Tiwari R., Dawood M. A. O., Dhama K., Abdel-Latif H. M. R. The functionality of probiotics in aquaculture: An overview. *Fish Shellfish Immunol.* 2021;117(36):52.

Информация об авторах

Никита Геннадьевич Васильченко – кандидат биологических наук, старший научный сотрудник.

Камилла Витальевна Механцева – магистрант, МФТИ; лаборант-исследователь, лаборатория новых биопрепаратов, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского, ЮФУ.

Фёдор Дмитриевич Иванов – младший научный сотрудник, фронтальная лаборатория биоинженерии ризосферы, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского.

Елизавета Петровна Пуликова – младший научный сотрудник, фронтальная лаборатория биоинженерии ризосферы, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского.

Владимир Анатольевич Чистяков – доктор биологических наук, главный научный сотрудник, лаборатория здоровья почв, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского, ЮФУ; главный научный сотрудник, Центр агробиотехнологии, ДГТУ.

Александр Вячеславович Усатов – доктор биологических наук, профессор кафедры генетики, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского.

Анжелика Борисовна Брень – кандидат биологических наук, ведущий научный сотрудник, Центр агробиотехнологии, ДГТУ; старший научный сотрудник, научно-исследовательская лаборатория экспериментального мутагенеза, ЮФУ.

Дмитрий Владимирович Рудой – доктор технических наук, ведущий научный сотрудник, Центр агробиотехнологии.

Information about the authors

Nikita G. Vasilchenko – Candidate of Science (Biology), Senior Researcher.

Kamilla V. Mekhantseva – Master's Student, MIPT; Research Lab Assistant, Laboratory of New Biopreparations, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology, SFedU.

Fyodor D. Ivanov – Junior Researcher, Frontier Laboratory of Rhizosphere Bioengineering, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology.

Elizaveta P. Pulikova – Junior Researcher, Frontier Laboratory of Rhizosphere Bioengineering, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology.

Vladimir A. Chistyakov – Doctor of Science (Biology), Main Researcher, Laboratory of Soil Health, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology, SFedU; Researcher, Center for Agrobiotechnology, DSTU.

Aleksandr V. Usatov – Doctor of Science (Biology), Professor, Department of Genetics, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology.

Anzhelika B. Bren – Candidate of Science (Biology), Leading Researcher, Center for Agrobiotechnology, DSTU; Senior Researcher, Research Laboratory of Experimental Mutagenesis, SFedU.

Dmitry V. Rudoy – Doctor of Science (Technical), Leading Researcher, Center for Agrobiotechnology.

*Статья поступила в редакцию 19.07.2024; одобрена после рецензирования 10.08.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 19.07.2024; approved after reviewing 10.08.2024; accepted for publication 16.10.2024.*

Научная статья

УДК 631.46; 57.044

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-90-96

ДИАГНОСТИКА ЭКОТОКСИЧНОСТИ ЛИТИЯ В ПОЧВАХ РАЗНОЙ БУФЕРНОСТИ ПО АКТИВНОСТИ ИНВЕРТАЗЫ

Н.А. Евстегнеева^{1✉}, С.И. Колесников², А.Н. Тимошенко³, А.С. Русева⁴, Т.В. Минникова⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

¹ evstegneeva@sfedu.ru ✉

² kolesnikov@sfedu.ru

³ aly9215@mail.ru

⁴ ruseva.ann@yandex.ru

⁵ Loko261008@yandex.ru

Аннотация. Проведено исследование влияния загрязнения литием на активность инвертазы в черноземе обыкновенном, бурой лесной почве и серопесках. Литий вносили в форме хлорида и гидроксида в концентрациях 15, 100 и 500 мг/кг. Контролем служила незагрязненная почва с естественным фоновым содержанием элемента. Инкубацию проводили в течение 10 сут. Установлено, что загрязнение исследуемых почв соединениями лития приводит к снижению активности инвертазы. Изменение ферментативной активности зависело от концентрации элемента в почве. При внесении низких концентраций соединений лития зафиксирован эффект гормезиса. Наибольшую устойчивость к загрязнению литием проявили чернозем обыкновенный и бурая лесная почва, наименьшую – серопески.

Ключевые слова: экотоксичность, чернозем обыкновенный, бурая лесная почва, серопески, ферментативная активность, устойчивость

Для цитирования: Евстегнеева Н.А., Колесников С.И., Тимошенко А.Н., Русева А.С., Минникова Т.В. Диагностика экотоксичности лития в почвах разной буферности по активности инвертазы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 90–96.

Благодарности: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-24-00535 (<https://rscf.ru/project/24-24-00535/>) в Южном федеральном университете.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

DIAGNOSTICS OF LITHIUM ECOTOXICITY IN SOILS OF DIFFERENT BUFFERING CAPACITY BY INVERTASE ACTIVITY

N.A. Evstegneeva^{1✉}, S.I. Kolesnikov², A.N. Timoshenko³, A.S. Ruseva⁴, T.V. Minnikova⁵

^{1, 2, 3, 4, 5} Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

¹ evstegneeva@sfedu.ru ✉

² kolesnikov@sfedu.ru

³ aly9215@mail.ru

⁴ ruseva.ann@yandex.ru

⁵ Loko261008@yandex.ru

Abstract. The study of the effect of lithium pollution on invertase activity in Haplic Chernozem, Eutric Cambisol and Eutric Arenosol was carried out. Lithium was introduced in the form of chloride and hydroxide at concentrations of 15, 100 and 500 mg/kg. The control was uncontaminated soil with a natural background content of the

© Евстегнеева Н.А., Колесников С.И., Тимошенко А.Н., Русева А.С., Минникова Т.В., 2024

element. Incubation was carried out for 10 days. As a result of the study of the effect of lithium pollution on invertase activity in soils of different buffering, it was found that contamination of the studied soils with lithium compounds leads to a decrease in invertase activity. The change in enzymatic activity depended on the concentration of the element in the soil. When low concentrations of lithium compounds are introduced, the effect of hormesis is recorded. Haplic Chernozem and Eutric Cambisol showed the greatest resistance to lithium contamination, while Eutric Arenosol showed the least resistance.

Keywords: *ecotoxicity, Haplic Chernozem, Eutric Cambisol, Eutric Arenosol, enzymatic activity, stability*

For citation: *Evstegneeva N.A., Kolesnikov S.I., Timoshenko A.N., Ruseva A.S., Minnikova T.V. Diagnostics of Lithium Ecotoxicity in Soils of Different Buffering Capacity by Invertase Activity. Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science. 2024;(4-1):90-96. (In Russ.).*

Acknowledgments: *the study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 22-24-00535 (<https://rscf.ru/project/24-24-00535/>) at the Southern Federal University.*

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Литий (Li) является одним из наиболее технофильных элементов. Прогнозируется рост технофильности Li в XXI в. относительно 2000-х гг. более чем в 50 раз [1]. В связи с ростом масштабов производства и потребления Li в последние годы его рассматривают в качестве нового загрязнителя окружающей среды [2–4]. Стремительное потребление Li связано с его использованием в энергетическом секторе для производства аккумуляторов, прежде всего литийионных, применяемых в электротранспорте, стационарных (промышленных и бытовых) накопителях энергии и в компактных источниках тока для компьютерной и телекоммуникационной техники [2, 5]. Значительный вклад в загрязнение почв литием вносит неправильная утилизация электронных отходов [6–8].

Несмотря на то что почвы постоянно подвергаются загрязнению литием, мало что известно о характеристиках загрязнения. Многие аспекты остаются малоисследованными или еще не исследованными, например зависимость экотоксичности Li от химической формы его соединений, концентрации в почве и др. Серьезного внимания требует изучение влияния Li на физико-химические свойства и микробные сообщества почвы.

Вследствие этого актуальным представляется провести комплексную широкомасштабную сравнительную оценку экотоксичности разных концентраций и химических форм Li.

Цель работы – оценить экотоксичность Li в почвах разной буферности по активности инвертазы.

Объект и методы исследования

Для модельного исследования были выбраны три типа почв разной буферности: чернозем обыкновенный, бурая лесная кислая почва, песчаные почвы черноземной зоны (серопески). Эти почвы отличаются по свойствам, которые определяют подвижность в почве металлов и металлоидов. Сравнение влияния загрязнения Li на показатели почв позволит установить зависимость его экотоксичности от реакции среды, гранулометрического состава, содержания органического вещества.

Чернозем обыкновенный тяжелосуглинистый, по классификации World Reference Base for Soil Resources (WRB) [9] – Haplic Chernozem (Loamic), отобран в Ботаническом саду ЮФУ (Ростов-на-Дону). Почва характеризуется следующими свойствами: содержание гумуса – 3,4 %, pH=7,8, тяжелосуглинистый гранулометрический состав. Бурая лесная кислая почва (Eutric Cambisol [9]) отобрана в Краснодарском крае, Туапсинском районе, на выезде из поселка Горского. Содержание гумуса – 4,7 %, pH=6,0, тяжелосуглинистый гранулометрический состав. Серопески (Eutric Arenosol [9]) отбирали в Ростовской области, Усть-Донецком районе, ст. Верхнекундрюченской. Почва характеризуется следующими свойствами: содержание гумуса – 2,7 %, pH=7,3, легкосуглинистый гранулометрический состав.

Литий вносили в почву в виде хлорида (LiCl) и гидроксида (LiOH) в концентрациях 15, 100 и 500 мг на 1 кг почвы для охвата всего диапазона концентраций Li, встречающегося на сегодняшний день в естественных и загрязненных почвах. Контролем служила незагрязненная почва с естественным фоновым содержанием элемента.

Инкубацию проводили в течение 10 сут в контролируемых условиях: при постоянных температуре (24–25 °C) и влажности воздуха (30 %).

Измерение активности почвенных ферментов рекомендовано в качестве одного из самых чувствительных индикаторов состояния почвы при загрязнении окружающей среды [10–13]. К тому же активность почвенных ферментов в лабораторных условиях определяют быстрыми и несложными методами [14].

В данном исследовании изучали влияние загрязнения Li на фермент из класса гидролаз – инвертазу, которая играет фундаментальную роль в круговороте почвенного углерода (C) [15, 16]. Активность инвертазы (β -фруктофуранозидаза) определяли по количеству глюкозы при гидролизе сахарозы, колориметрически, с использованием реактива Феллинга (мг глюкозы/10 г сухой почвы/24 ч). [17, 18].

Для оценки достоверности влияния загрязнения на исследуемые показатели был использован дисперсионный анализ.

Результаты и обсуждение

В результате исследования установлено, что загрязнение исследуемых почв соединениями Li приводит к ингибированию активности инвертазы. Изменение активности фермента зависит от химической формы (хлорид или гидроксид) Li и концентрации элемента в почве.

На рис. 1 представлено изменение активности инвертазы при загрязнении чернозема обыкновенного, бурой лесной почвы и серопесков LiCl. При внесении 15 и 100 мг/кг LiCl в чернозем обыкновенный отмечена стимуляция активности фермента на 18 и 6 % соответственно относительно незагрязненного контрольного образца почвы. Повышение концентрации LiCl до 500 мг/кг приводит к снижению активности инвертазы на 14 % ниже контроля.

В бурой лесной почве эффект гормезиса (стимуляция активности фермента) проявился только при внесении 15 мг/кг Li в форме хлорида, активность инвертазы увеличилась на 16 % относительно контроля. При концентрации 100 мг/кг зафиксировано значение ферментативной активности на 10 % ниже контрольного образца. Концентрация 500 мг/кг привела к снижению активности инвертазы на 22 % относительно контроля.

При загрязнении серопесков LiCl не было зафиксировано стимуляции активности инвертазы. При внесении 15, 100 и 500 мг/кг Li активность фермента снизилась на 6, 17 и 26 % по сравнению с контролем соответственно.

Изменение активности инвертазы при загрязнении чернозема обыкновенного, бурой лесной почвы и серопесков LiOH представлено на рис. 2.

Минимальная концентрация LiOH не оказала влияния на активность инвертазы в черноземе обыкновенном. При концентрации 100 мг/кг активность фермента снизилась на 26 % по сравнению с незагрязненным образцом, концентрация 500 мг/кг Li привела к уменьшению активности фермента на 40 % ниже контроля.

В бурой лесной почве изменений активности инвертазы при внесении 15 мг/кг LiOH не отмечено. Концентрация 100 мг/кг снизила значения показателя на 10 % относительно контроля, при 50 мг/кг – на 47 % ниже контроля.

В серопесках уже минимальная концентрация (15 мг/кг) LiOH привела к снижению активности инвертазы на 12 % относительно контроля, концентрация 100 мг/кг – на 18 %. Максимальное снижение активности инвертазы отмечено в серопесках при внесении 500 мг/кг лития в форме гидроксида, снижение составило 66 % относительно контрольного образца.

Полученные данные подтверждаются ранее проведенными исследованиями. В работе [19] отмечена стимуляция почвенных ферментов (сахараза, уреазы, арилсульфатаза, пероксидаза, протеаза, фосфатаза, фитаза и липаза) при внесении в почву низких концентраций Li (от 10 до 80 мг/кг). Повышение концентраций привело к значительному снижению активности ферментов, как и в нашем исследовании.

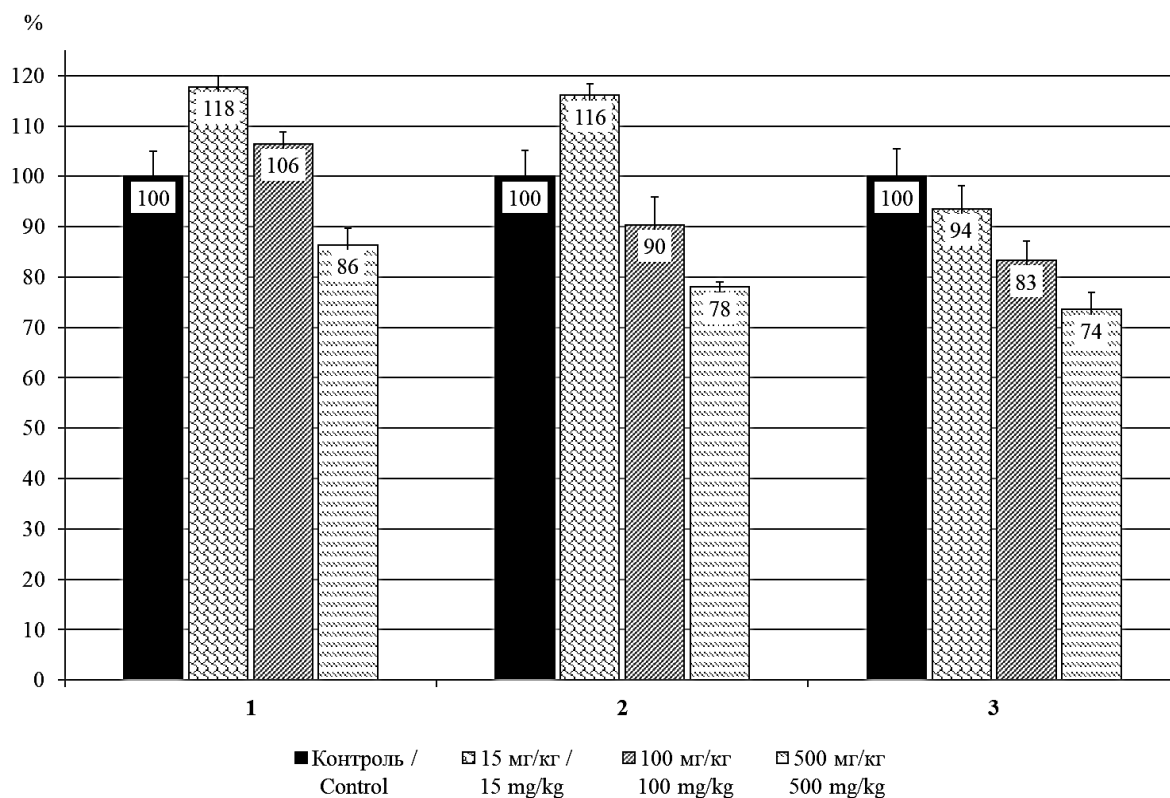


Рис. 1. Изменение активности инвертазы при загрязнении чернозема обыкновенного (1), бурой лесной почвы (2) и серопесков (3) LiCl, % от контроля / Fig.1. Change in invertase activity during contamination of Haplic Chernozem (1), Eutric Cambisol (2) and Eutric Arenosol (3) by LiCl, % of control

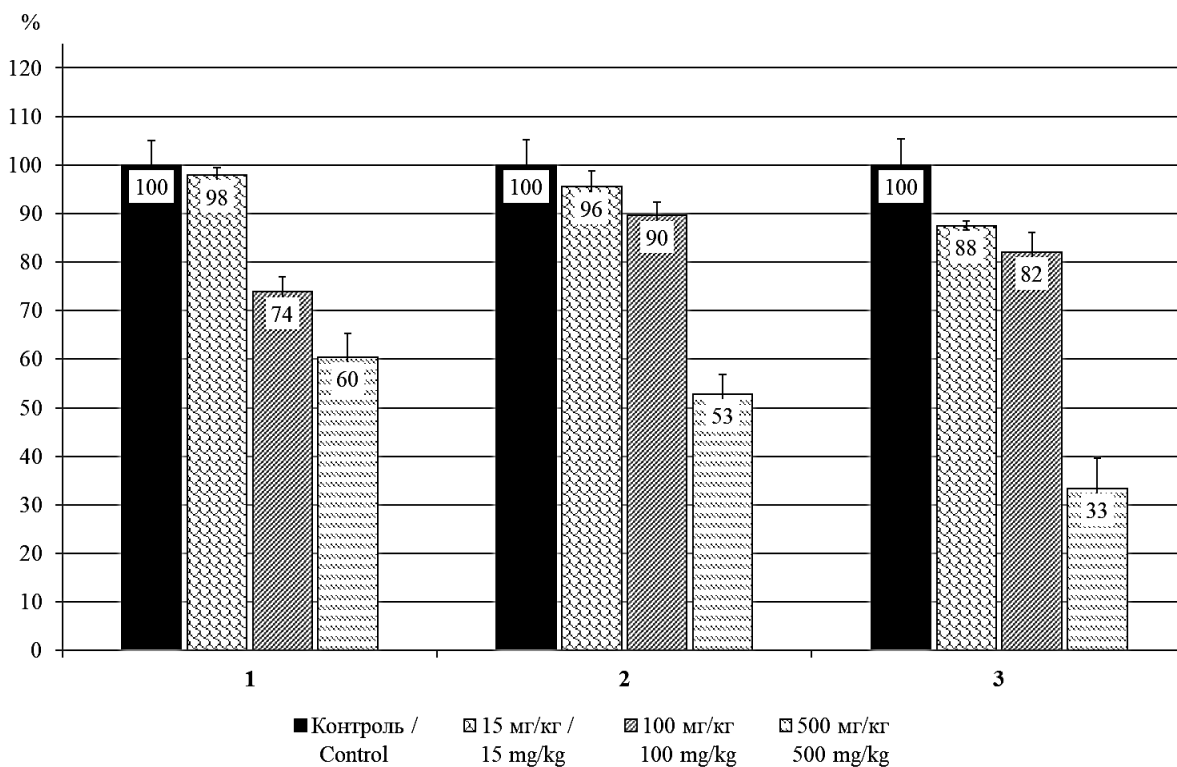


Рис. 2. Изменение активности инвертазы при загрязнении чернозема обыкновенного (1), бурой лесной почвы (2) и серопесков (3) LiOH, % от контроля / Fig. 2. Change in invertase activity during contamination of Haplic Chernozem (1), Eutric Cambisol (2) and Eutric Arenosol (3) by LiOH, % of control

Сравнительная оценка влияния лития на исследованные почвы показала, что серопески менее устойчивы к загрязнению, чем чернозем обыкновенный и бурая лесная почва. Это связано с легким гранулометрическим составом и более низким содержанием гумуса в серопесках (2,7 %) по сравнению с тяжелосуглинистыми черноземом обыкновенным (3,4 %) и бурой лесной почвой (4,7 %). Органическое вещество выступает в качестве ключевого сорбента для Li в почвах, обуславливает меньшую подвижность Li в почвах и значительно минимизирует его доступность для растений и микроорганизмов [20]. Проведенные ранее исследования также показывают, что гранулометрический состав и содержание органического вещества являются основными факторами, регулирующими закрепление Li в почве [21–23].

Заключение

Установлено, что загрязнение исследуемых почв соединениями Li приводит к снижению активности инвертазы. Изменение ферментативной активности зависело от концентрации элемента в почве. При внесении низких концентраций соединений Li зафиксирован эффект гормезиса. Наибольшую устойчивость к загрязнению литием проявили чернозем обыкновенный и бурая лесная почва, наименьшую – серопески, что связано с генетическими особенностями этих почв. Результаты исследования целесообразно использовать при биодиагностике состояния почв разной буферности, загрязненных литием.

Список источников

1. Касимов Н.С., Власов Д.В. Технофильность химических элементов в начале XXI века // Вестн. МГУ. Серия 5: География. 2012. № 1. С. 15–22.
2. Aral H., Vecchio-Sadus A. Lithium: environmental pollution and health effects. Clayton South, VIC, Australia: CSIRO Minerals, 2011. P. 116–125. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-63951-6.00531-3>
3. Bolan N., Hoang S.A., Tanveer M., Wang L., Bolan S., Sooriyakumar P., Rinklebe J. From mine to mind and mobiles - Lithium contamination and its risk management // Environmental Pollution. 2021. Vol. 290. P. 118067. <https://doi.org/10.1016/j.envpol.2021.118067>
4. Lindsey B.D., Belitz K., Cravotta III C.A., Toccalino P.L., Dubrovsky N.M. Lithium in groundwater used for drinking-water supply in the United States // Science of the Total Environment. 2021. Vol. 767. P. 144691. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.144691>
5. Bibienne T., Magnan J.F., Rupp A., Laroche N. From mine to mind and mobiles: Society's increasing dependence on lithium // Elements: An International Magazine of Mineralogy, Geochemistry, and Petrology. 2020. Vol. 16, № 4. P. 265–270. <https://doi.org/10.2138/gselements.16.4.265>
6. Li W., Achal V. Environmental and health impacts due to e-waste disposal in China - A review // Science of the Total Environment. 2020. Vol. 737. P. 139745. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.139745>
7. Avila-Arias H., Nies L.F., Gray M.B., Turco R.F. Impacts of molybdenum-, nickel-, and lithium-oxide nanomaterials on soil activity and microbial community structure // Science of the Total Environment. 2019. Vol. 652. P. 202–211. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2018.10.189>
8. Franzaring J., Damsohn W., Fangmeier A., Schlosser S., Kurz H., Büttner P. Phytotoxicity of tin mine waste and accumulation of involved heavy metals in common buckwheat (*Fagopyrum esculentum* Moench) // International J. of Phytoremediation. 2018. Vol. 20, № 5. P. 462–470. <https://doi.org/10.1080/15226514.2017.1365349>
9. World Reference Base for Soil Resources. International soil classification system for naming soils and creating legends for soil maps. 4th edition published in 2022 by the International Union of Soil Sciences (IUSS). Vienna, Austria, 2022. 234 p.
10. Wahsha M., Nadimi-Goki M., Fornasier F., Al-Jawasreh R., Hussein E. I., Bini C. Microbial enzymes as an early warning management tool for monitoring mining site soil // Catena. 2017. Vol. 148. P. 40–45. <https://doi.org/10.1016/j.catena.2016.02.021>
11. Поляк Ю.М., Сухаревич В.И. Почвенные ферменты и загрязнение почв: биодegradация, биоремедиация, биоиндикация // Агрохимия. 2020. № 3. С. 83–93. <https://doi.org/10.31857/S0002188120010123>
12. Zak D.R., Pregitzer K.S., Burton A.J., Edwards I.P., Kellner H. Microbial responses to a changing environment: implications for the future functioning of terrestrial ecosystems // Fungal Ecol. 2011. Vol. 4. P. 386–395. <https://doi.org/10.1016/j.funeco.2011.04.001>
13. Терехова В.А. Биотестирование экотоксичности почв при химическом загрязнении: современные подходы к интеграции для оценки экологического состояния (обзор) // Почвоведение. 2022. № 5. С. 586–599. <https://doi.org/10.1134/S106422932205009X>

14. Lee S.H., Kim E.Y., Hyun S., Kim J. G. Metal availability in heavy metal-contaminated open burning and open detonation soil: assessment using soil enzymes, earthworms, and chemical extractions // *J. of Hazardous Materials*. 2009. Vol. 170, № 1. P. 382–388. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2009.04.088>
15. Yang J., Yang F., Yang Y., Xing G., Deng C., Shen Y., Luo L., Li B., Yuan H. A proposal of “core enzyme” bioindicator in long-term Pb-Zn ore pollution areas based on topsoil property analysis // *Environmental Pollution*. 2016. Vol. 213. P. 760–769. <https://doi.org/10.1016/j.envpol.2016.03.030>
16. Хазиев Ф.Х. Функциональная роль ферментов в почвенных процессах // *Вестн. АН Республики Башкортостан*. 2015. Т. 20, № 2 (78). С. 14–24.
17. Хазиев Ф.Х. Методы почвенной энзимологии. М.: Наука, 2005. 252 с.
18. Даденко Е.В., Казеев К.Ш., Колесников С.И. Методы определения ферментативной активности почв. Ростов н/Д.; Таганрог: Южн. фед. ун-т, 2021. 176 с.
19. Xu Z., Zhang Z., Peng S., Yuan Y., Wang X. Influences of lithium on soil properties and enzyme activities. // *Chemosphere*. 2023. Vol. 313. P. 137458. <https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2022.137458>
20. Yalamanchali R. Lithium, an emerging environmental contaminant, is mobile in the soil-plant system. Lincoln University, 2012.
21. Kabata-Pendias A., Pendias H. Trace Elements in Soils and Plants. 2nd ed. Boca Raton, FL, USA; London, UK: CRC Press, 1992. 432 p.
22. Sastre J., Rauret G., Vidal M. Sorption-desorption tests to assess the risk derived from metal contamination in mineral and organic soils // *Environment International*. 2007. Vol. 33, № 2. P. 246–256. <https://doi.org/10.1016/j.envint.2006.09.017>
23. Römken P.F.A.M., Guo H.Y., Chu C.L., Liu T.S., Chiang C.F., Koopmans G.F. Characterization of soil heavy metal pools in paddy fields in Taiwan: Chemical extraction and solid-solution partitioning // *J. of Soils and Sediments*. 2009. Vol. 9. P. 216–228. <https://doi.org/10.1007/s11368-009-0075-z>

References

1. Kasimov N.S., Vlasov D.V. Technophilia of chemical elements in the beginning of the 21st century. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Seriya 5: Geografiya = Moscow University Bulletin. Series 5: Geography*. 2012;(1):15-22. (In Russ.).
2. Aral H., Vecchio-Sadus A. *Lithium: environmental pollution and health effects*. Clayton South, VIC, Australia: CSIRO Minerals, 2011:116-125. <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-63951-6.00531-3>
3. Bolan N., Hoang S. A., Tanveer M., Wang L., Bolan S., Sooriyakumar P., Rinklebe J. From mine to mind and mobiles – Lithium contamination and its risk management. *Environmental Pollution*. 2021;290:118067. <https://doi.org/10.1016/j.envpol.2021.118067>
4. Lindsey B. D., Belitz K., Cravotta III C. A., Toccalino P. L., Dubrovsky N. M. Lithium in groundwater used for drinking-water supply in the United States. *Science of the Total Environment*. 2021;767:144691. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.144691>
5. Bibienne T., Magnan J. F., Rupp A., Laroche N. From mine to mind and mobiles: Society’s increasing dependence on lithium. *Elements: An International Magazine of Mineralogy, Geochemistry, and Petrology*. 2020;16(4):265-270. <https://doi.org/10.2138/gselements.16.4.265>
6. Li W., Achal V. Environmental and health impacts due to e-waste disposal in China – A review. *Science of the Total Environment*. 2020;737:139745. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2020.139745>
7. Avila-Arias H., Nies L. F., Gray M. B., Turco R. F. Impacts of molybdenum-, nickel-, and lithium-oxide nanomaterials on soil activity and microbial community structure. *Science of the Total Environment*. 2019;652:202-211. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2018.10.189>
8. Franzaring J., Damsohn W., Fangmeier A., Schlosser S., Kurz H., Büttner P. Phytotoxicity of tin mine waste and accumulation of involved heavy metals in common buckwheat (*Fagopyrum esculentum* Moench). *International Journal of Phytoremediation*. 2018;20(5):462-470. <https://doi.org/10.1080/15226514.2017.1365349>
9. *World Reference Base for Soil Resources*. International soil classification system for naming soils and creating legends for soil maps. 4th ed. Vienna, Austria: International Union of Soil Sciences Press; 2022. 234 p.
10. Wahsha M., Nadimi-Goki M., Fornasier F., Al-Jawasreh R., Hussein E. I., Bini C. Microbial enzymes as an early warning management tool for monitoring mining site soil. *Catena*. 2017;148:40-45. <https://doi.org/10.1016/j.catena.2016.02.021>
11. Polyak Y.M., Sukharevich V.I. Soil enzymes and soil pollution: biodegradation, bioremediation, bioindication. *Agrokimiya = Agricultural Chemistry*. 2020;(3):83-93. <https://doi.org/10.31857/S0002188120010123> (In Russ.).
12. Zak D.R., Pregitzer K.S., Burton A.J., Edwards I.P., Kellner H. Microbial responses to a changing environment: implications for the future functioning of terrestrial ecosystems. *Fungal Ecology*. 2011;4:386-395. <https://doi.org/10.1016/j.funeco.2011.04.001>

13. Terekhova V.A. Biotesting of Soil Ecotoxicity in Case of Chemical Contamination: Modern Approaches to Integration for Environmental Assessment (a Review). *Eurasian Soil Science*. 2022;55(5):601-612. <https://doi.org/10.1134/S106422932205009X>
14. Lee S. H., Kim E. Y., Hyun S., Kim J. G. Metal availability in heavy metal-contaminated open burning and open detonation soil: assessment using soil enzymes, earthworms, and chemical extractions. *Journal of Hazardous Materials*. 2009;170(1):382-388. <https://doi.org/10.1016/j.jhazmat.2009.04.088>
15. Yang J., Yang F., Yang Y., Xing G., Deng C., Shen Y., Luo L., Li B., Yuan H. A proposal of “core enzyme” bioindicator in long-term Pb-Zn ore pollution areas based on topsoil property analysis. *Environmental Pollution*. 2016;213:760-769. <https://doi.org/10.1016/j.envpol.2016.03.030>
16. Khaziev F.Kh. Functional role of enzymes in soil processes. *Vestnik Akademii nauk Respubliki Bashkortostan = Bulletin of the Academy of Science of the Republic of Bashkortostan*. 2015;20(2):14-24. (In Russ.).
17. Khaziev F.Kh. *Methods of soil enzymology*. Moscow: Nauka Publ.; 2005. 252 p. (In Russ.).
18. Dadenko E.V., Kazeev K.Sh., Kolesnikov S.I. *Methods for determining the enzymatic activity of soils*. Rostov-on-Don, Taganrog: Southern Federal University Press; 2021. 176 p. (In Russ.).
19. Xu Z., Zhang Z., Peng S., Yuan Y., Wang X. Influences of lithium on soil properties and enzyme activities. *Chemosphere*. 2023;313:137458. <https://doi.org/10.1016/j.chemosphere.2022.137458>
20. Yalamanchali R. *Lithium, an emerging environmental contaminant, is mobile in the soil-plant system*. Lincoln University, 2012.
21. Kabata-Pendias A., Pendias H. *Trace Elements in Soils and Plants*. 2nd ed. Boca Raton, FL, USA; London, UK: CRC Press; 1992. 432 p.
22. Sastre J., Rauret G., Vidal M. Sorption-desorption tests to assess the risk derived from metal contamination in mineral and organic soils. *Environment International*. 2007;33(2):246-256. <https://doi.org/10.1016/j.envint.2006.09.017>
23. Römken P.F.A.M., Guo H.Y., Chu C.L., Liu T.S., Chiang C.F., Koopmans G.F. Characterization of soil heavy metal pools in paddy fields in Taiwan: Chemical extraction and solid-solution partitioning. *Journal of Soils and Sediments*. 2009;9:216-228. <https://doi.org/10.1007/s11368-009-0075-z>

Информация об авторах

Наталья Андреевна Евстегнеева – преподаватель, кафедра экологии и природопользования, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского.

Сергей Ильич Колесников – доктор сельскохозяйственных наук, профессор, заведующий кафедрой экологии и природопользования, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского.

Алена Николаевна Тимошенко – кандидат биологических наук, ведущий научный сотрудник, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского.

Анна Степановна Русева – преподаватель, кафедра экологии и природопользования, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского.

Татьяна Владимировна Минникова – кандидат биологических наук, ведущий научный сотрудник, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Ивановского.

Information about the authors

Natalia A. Evstegneeva – Lecturer, Department of Ecology and Nature Management, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology.

Sergey I. Kolesnikov – Doctor of Science (Agriculture), Professor, Head of Department of Ecology and Nature Management, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnologies.

Alena N. Timoshenko – Candidate of Science (Biology), Leading Researcher, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnologies.

Anna S. Ruseva – Lecturer, Department of Ecology and Nature Management, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology.

Tatiana V. Minnikova – Candidate of Science (Biology), Leading Researcher, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnologies.

Статья поступила в редакцию 19.07.2024; одобрена после рецензирования 10.08.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 19.07.2024; approved after reviewing 10.08.2024; accepted for publication 16.10.2024.

Научная статья

УДК 631.4

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-97-105

ОЦЕНКА ЗАПАСОВ УГЛЕРОДА В ПОЧВАХ ЛЕСОВ ЮГА ПРИМОРЬЯ

Елена Анатольевна Жарикова^{1✉}, Ольга Михайловна Голодная²

^{1, 2} Федеральный научный центр биоразнообразия наземной биоты Восточной Азии ДВО РАН,
Владивосток, Россия

¹ejarikova@mail.ru✉

²omgolodnaya@mail.ru

Аннотация. Основные запасы органического вещества наземных экосистем планеты аккумулированы в лесных почвах. Исследованы закономерности изменения запасов углерода в зависимости от местоположения в рельефе и растительности в типичных буроземах широколиственных лесов западного отрогов Сихотэ-Алиня Приморского края. Буроземы типичные юго-юго-восточного и северо-северо-западного склонов морфологически отличаются мощностью генетических горизонтов и степенью каменистости. Запасы углерода в них варьируют в зависимости от места расположения и преобладающих древесных пород, постепенно увеличиваясь в почвах от водораздела вниз по склону к подножью. Наибольшие запасы углерода выявлены в почвах поймы ручья на участке березово-ясеневоего разнотравного леса (104–108 т/га – в слоях 0–30 и 0–50 см), наименьшие – в почвах крутого склона южной экспозиции под ксерофитными дубняками (65–67 т/га – в слоях 0–30 и 0–50 см). Полученные данные полностью соответствуют оценке запасов углерода в почвенных слоях для Приморско-Приамурского хвойно-широколиственного района Дальнего Востока. Выявлены зависимости между содержанием поглощенных оснований, органического углерода, доступных форм элементов питания (фосфора и калия), актуальной кислотностью и фракцией физической глины.

Ключевые слова: запас углерода, почва, экспозиция склона, древесные породы, кислотность, содержание фракции физической глины

Для цитирования: Жарикова Е.А., Голодная О.М. Оценка запасов углерода в почвах лесов юга Приморья // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 97–105.

Благодарности: работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (рег. № 124012400285-7) и важнейшего инновационного проекта государственного значения «Разработка системы наземного и дистанционного мониторинга пулов углерода и потоков парниковых газов на территории Российской Федерации, обеспечение создания системы учета данных о потоках климатически активных веществ и бюджете углерода в лесах и других наземных экологических системах» (рег. № 123030300031-6).

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

ASSESSMENT OF CARBON STOCKS IN SOILS FORESTS OF THE SOUTH OF PRIMORYE

Elena A. Zharikova^{1✉}, Olga M. Golodnaya²

^{1, 2} Federal Scientific Center of the East Asia Terrestrial Biodiversity, Far Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Vladivostok, Russia

¹ejarikova@mail.ru✉

²omgolodnaya@mail.ru

© Жарикова Е.А., Голодная О.М., 2024

Abstract. *The main reserves of organic matter of terrestrial ecosystems of the planet are accumulated in forest soils. The patterns of changes in carbon stocks depending on the location in the relief and vegetation in Haplic Cambisols (brown soils typical) of broad-leaved forests of the western spurs of the Sikhote-Alin Primorsky Territory are studied. Haplic Cambisols of the south-southeastern and north-northwestern slopes morphologically differ in the thickness of the genetic horizons and the degree of stony. Their carbon reserves vary depending on the location and the prevailing tree species, and they gradually increase in soils from the watershed downhill to the foot. The largest carbon reserves were found in the soils of the floodplain of the stream in the area of birch-ash mixed forest (104–108 t/ha in layers 0–30 and 0–50 cm), the smallest – in the soils of the steep slope of the southern exposure under xerophytic oak forests (65–67 t/ha, in layers 0–30 and 0–50 cm). The data obtained fully correspond to the assessment of carbon reserves in soil layers for the Primorsko-Priamursky coniferous-deciduous region of the Far East. Close relationships have been revealed between the content of exchangeable bases, organic carbon, available forms of nutrients (phosphorus and potassium), actual acidity and the content of the fraction of physical clay.*

Keywords: *carbon stock, soil, slope exposure, tree species, acidity, physical clay*

For citation: Zharikova E.A., Golodnaya O.M. Assessment of Carbon Stocks in Soils Forests of the South of Primorye. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):97-105. (In Russ.).

Acknowledgments: *the research was carried out within the state assignment of Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Registration number: 124012400285-7) and as part of the most important innovative project of national importance “Development of a system for ground-based and remote monitoring of carbon pools and greenhouse gas fluxes in the territory of the Russian Federation, ensuring the creation of recording data systems on the fluxes of climate-active substances and the carbon budget in forests and other terrestrial ecological systems” (Registration number: 123030300031-6).*

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Леса занимают примерно 30 % поверхности Земли и играют важную роль в глобальном круговороте углерода. Лесные почвы – признанный резервуар стабильного углерода в биосфере, а в условиях глобального потепления связывание углерода является одной из важнейших функций лесов. Установлено, что в лесных почвах содержится более 40 % общего органического углерода наземных экосистем [1], при этом накопление углерода определяется балансом между его поступлением с опадом растений и выделением в результате разложения и зависит от многих факторов, в частности от видового состава древесных пород, микроклиматических условий, рельефа, почв и др.

Состав и свойства почвы, тепловой и водно-воздушный режимы могут варьировать в зависимости от экспозиции и крутизны склона. О заметных различиях свойств почв, расположенных на склонах южной (инсолируемой) и северной (теневогой) экспозиции, уже неоднократно упоминали [2, 3], но в регионе подобные исследования не проводили.

Между тем существует мнение, что оценка комбинированного влияния различных факторов на накопление углерода в лесных почвах должна лежать в основе разработки мер по смягчению последствий изменения климата в условиях необходимости достижения углеродной нейтральности [4]. Цель работы – дать сравнительную оценку запасов органического углерода в почвах широколиственных лесов южной части Приморья на склонах разной экспозиции.

Объекты и методы

Исследования выполнены в лесах западных отрогов Сихотэ-Алиня вблизи Горнотаежной станции ДВО РАН (43°41'37", 132°09'10", юго-западная часть Приморского края), на территории, которая входит в южную подзону смешанных хвойно-широколиственных лесов, основу которых составляют виды маньчжурской флоры [5]. Низкогорный рельеф ограничивает проникновение влажного морского воздуха вглубь материка, среднегодовая норма осадков – 520–780 мм·год⁻¹, преобладающая их часть выпадает в летний период. Средняя температура января – -15 °С, июля – +21 °С, вегетационный период длится 178–189 дней [6].

Семь разрезов были заложены рядом с экологическим профилем многолетних исследований ценотической структуры леса в водосборном бассейне ручья Дегтярева, притока р. Комаровки (бассейн Японского моря) (рис. 1, табл. 1). Трансекта пересекает бассейн ручья от водораздела до водораздела по юго-юго-восточному (длина 140 м, ксерофитный дубняк) и северо-северо-западному (длина 610 м, широколиственный лес) склонам. Разница абсолютных отметок – от 184 (пойма) до 230 (южный склон) и 260 м н. у. м. (северный склон). Крутизна поверхности варьирует от 7–10° на северном до 25–40° на южном склоне [7]. Все исследуемые почвы являются буроземами типичными и морфологически отличаются мощностью генетических горизонтов и степенью каменистости.

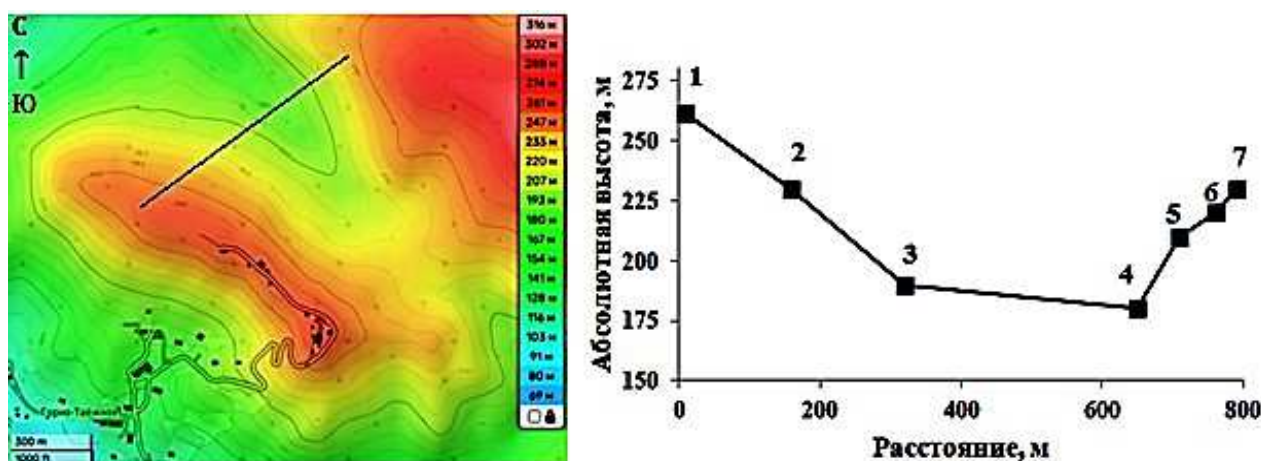


Рис. 1. Район исследования. ■ – номера разрезов (URL: <https://ru-ru.topographic-map.com>)
 / Fig. 1. The research area. ■ - soil profile numbers

Таблица 1 / Table 1

Условия почвообразования / Soil formation conditions

Разрез	Рельеф	Экспозиция склона	Высота, м	Почвообразующая порода	Тип леса [7]
1	Водораздел	С-С-З	260	Элювий плотных пород	Дубняк с липой разнокустарниковый
2	Верхняя часть пологого склона	С-С-З	230	Элюво-делювий плотных пород	Липово-дубовый с кленом, разнокустарниково-чубушниковый
3	Средняя часть пологого склона	С-С-З	190	Элюво-делювий плотных пород	Осиново-липовый с дубом лещиновый
4	Пойма ручья	Ю-Ю-В	184	Аллювий	Березово-ясеневый разнотравный
5	Средняя часть крутого склона	Ю-Ю-В	210	Элюво-делювий плотных пород	Дубняк осоковый
6	Верхняя часть крутого склона	Ю-Ю-В	220	Элюво-делювий плотных пород	Дубняк марьянниково-осоковый
7	Водораздел	Ю-Ю-В	230	Элювий плотных пород	Дубняк осоковый

Содержание органического углерода определяли методом Тюрина, рН водный – потенциометрически, содержание поглощенных оснований – по Шолленбергеру, подвижные соединения фосфора и калия – по методу Кирсанова [8]. Запасы органического углерода рассчитаны по формуле $Z = C \cdot h \cdot d \cdot k$, где Z – запас органического углерода, т/га; C – содержание углерода, %; h – мощность слоя, см; d – плотность сложения, г/см³; k – коэффициент каменистости.

Результаты и обсуждение

Профиль типичных буроземов – маломощный и слабо разделен на генетические горизонты. Подстилка (1–2 см) состоит преимущественно из листьев разной степени разложения. Под рыхлым темно-серым с бурым оттенком гумусовым преимущественно легкосуглинистым горизонтом поршисто-зернистой структуры залегает уплотненный иллювиальный горизонт светло-бурого цвета, порошисто-мелкокомковатой структуры с обильным включением камней и щебня (часто свыше 40 %). Горизонт С палево-бурый, легкосуглинистый, комковатый, сильнокаменистый. Высокое содержание песчаных фракций в почвах крутого склона южной экспозиции, вероятно, является следствием процессов интенсивного физического выветривания в условиях более контрастного водно-термического режима при глубоком промерзании почв малоснежной зимой.

Актуальная кислотность поверхностных слоев варьирует от кислой до сильнокислой, несколько увеличивается с глубиной (табл. 2). Наиболее кислая среда выявлена в разрезах, заложенных на склоне южной экспозиции. Сумма поглощенных оснований очень высокая в верхних горизонтах почв склона северной экспозиции и изменяется от повышенной до высокой в почвах склона южной экспозиции, снижаясь в срединных слоях профиля. Высокая сумма поглощенных оснований в гумусовых горизонтах буроземов является характерной особенностью почв Приморья. Она варьирует в больших пределах и бывает выше 62 смоль (экв)/кг в почвах, развитых на элювии базальтов [9]. Кроме того, в почву с опадом древесных и кустарниковых пород поступает большое количество щелочных и щелочноземельных элементов. Порядок накопления зольных элементов в лесах южного Сихотэ-Алиня представлен рядом $Ca > Si > K > Mg > P > Al > Fe > Na$ [10].

Таблица 2 / Table 2

Основные свойства почв / Basic soil properties

Разрез	Горизонт	Глубина, см	pH _{H2O}	C орг., %	Сумма поглощенных оснований, смоль(экв)/кг	P ₂ O ₅	K ₂ O	Фракции, %	
						мг/100 г почвы		<0,001, мм	<0,01, мм
1	AУ	0–6	6,4	8,64	66,17	6,1	60,3	21	33
	ВМ	6–16	6,3	5,23	46,92	4,1	49,4	12	42
	С	16–30	5,4	2,32	21,61	0,3	14,1	14	38
2	AУ	0–14	5,7	7,09	43,47	2,2	29,1	10	34
	ВМ	14–20	5,6	3,69	26,07	0,8	9,9	10	43
	С	20–40	5,7	0,56	16,14	0,8	8,4	13	47
3	AУ	0–8	5,6	8,56	49,23	2,2	33,1	11	27
	ВМ	8–13	5,4	4,21	18,66	0,8	11,8	15	37
	С	13–25	5,3	1,12	15,52	0,2	6,7	17	28
4	AУ	0–8	5,2	6,21	25,61	1,7	20,6	13	30
	ВМ	8–17	4,9	3,88	9,98	2,0	7,8	19	27
	С	17–45	5,1	0,74	8,41	0,8	4,6	10	21
5	AУ	0–5	6,2	9,22	16,12	5,2	51,4	15	27
	ВМ	5–17	4,5	2,44	6,82	0,2	17,2	11	23
	С	17–40	4,6	0,65	5,70	0,1	20,4	9	24
6	AУ	0–5	4,3	10,31	30,3	3,8	62,1	14	25
	ВМ	5–12	4,2	3,72	7,93	1,7	39,2	16	25
	С	12–38	4,4	0,64	6,82	1,0	20,9	16	28
7	AУ	0–5	4,8	5,05	15,18	1,0	30,4	17	22
	ВМ	5–18	4,6	2,57	9,49	0,6	6,9	17	24
	С	18–30	4,6	0,65	5,7	0,1	20,4	19	26

Содержание доступного фосфора в гумусовых слоях большинства разрезов очень низкое, среднее – в разрезе 5, повышенное – в разрезах 1 и 6, с глубиной оно становится просто ничтожным, что характерно для буроземов Приморья. Количество обменного калия в верхней части профиля очень высокое, книзу падает. Содержание органического углерода в поверхностных горизонтах – 5,05–10,31 %, с глубиной снижается и в нижних слоях составляет 0,56–2,32 %. Эти данные мало отличаются от сведений, полученных более 40 лет назад [11], что свидетельствует о стабильности экосистемы.

Запасы углерода варьируют в зависимости от места расположения и преобладающей растительности (табл. 3). Экспозиция склонов и уклон – основные факторы, влияющие на их варьирование в почвах в условиях склонового рельефа. Наибольшие запасы углерода выявлены в почвах поймы ручья на участке березово-ясеневом разнотравного леса, наименьшие – в почвах крутого склона южной экспозиции под дубняками. В почвах как северного, так и южного склонов запасы углерода постепенно растут от водораздела к подножью. При этом они в средней части профиля почв склона южной экспозиции сравнимы с запасами в верхнем гумусовом слое (рис. 2). Подобные закономерности описаны для черных почв пологих холмов северо-восточного Китая, занятых дубовыми лесами [12].

Таблица 3 / Table 3

Запасы органического углерода в почвах, т/га / Reserves of organic carbon in soils, t/ha

Мощность слоя, см	Водораздел		Часть склона				
			Средняя		Нижняя		Подножие
	/260	/230	С/220	Ю/230	С/190	Ю/184	
0–30	74	62	87	66	85	65	104
0–50	86	65	90	69	90	68	108

Примечание. С, Ю – северная и южная экспозиция склона; /260 – высота над уровнем моря, м.

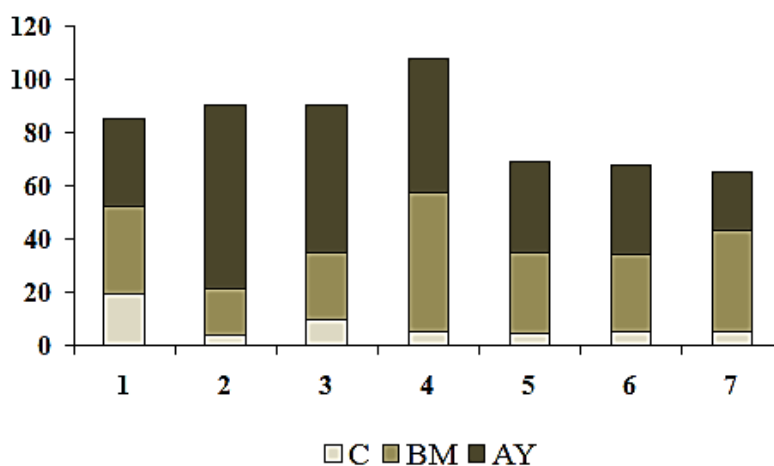


Рис. 2. Запасы углерода в различных горизонтах почв (0–50 см), т/га: 1–7 – номера разрезов / Fig. 2. Carbon stocks in the soil profile (0-50 cm), t/ha: 1-7 are numbers of soil profiles

Сотрудниками Центра по проблемам экологии и продуктивности лесов РАН доказано, что разнообразие древесных пород увеличивает продуктивность леса [13]. По данным многолетних исследований, лиственные растения древесного яруса на основе качества опада делятся на две основные функциональные группы: 1) лиственные деревья с быстроразлагаемым опадом (к ним относятся виды родов *Acer*, *Fraxinus*, *Tilia*, *Ulmus*, *Betula*, *Alnus*); 2) лиственные деревья с медленно разлагаемым опадом (*Populus*, *Quercus*, *Fagus*). В первом случае опад характеризуется высоким содержанием оснований, низкой кислотностью, узким C/N, во втором – низким содержанием оснований, высокой кислотностью, высоким содержанием лигнина и вторичных метаболитов.

тов, а также широким отношением C/N. Перемешивание в подстилке опада различного качества увеличивает эффективность переноса углерода в минеральные горизонты почв [4, 13]. Поэтому предположение, что разнообразие древесных культур (дуб, липа, осина, береза, ясень) на северном склоне способствует большей аккумуляции углерода (74–87 и 86–90 т/га в слоях 0–30 и 0–50 см), чем в почвах под монодоминантным ксерофитным дубняком на южном склоне (62–66 и 65–69 т/га соответственно) вполне обосновано.

Согласно расчетам средних запасов углерода под насаждениями лиственных культур в Дальневосточном регионе России [14], под мягколиственными породами они варьируют в пределах 82–110 т/га (в слоях 0–30 и 0–50 см), твердолиственными – 50–58 т/га. Полученные нами данные практически укладываются в указанные диапазоны. Они также полностью соответствуют оценке запасов углерода в почвенных слоях Приморско-Приамурского хвойно-широколиственного района (61±12 и 84±20 т/га в слоях 0–30 и 0–50 см) [15].

Анализ главных компонент (РСА) дал возможность описать более 63 % общей изменчивости массива данных (рис. 3). Наиболее тесная положительная связь выявлена между содержанием поглощенных оснований, органического углерода, доступных форм фосфора и калия, фракции физической глины, актуальной кислотностью и запасом органического углерода (табл. 4). Достаточное количество элементов минерального питания способствует хорошей биопродуктивности леса, и соответственно, высокому содержанию органического вещества в почвах.

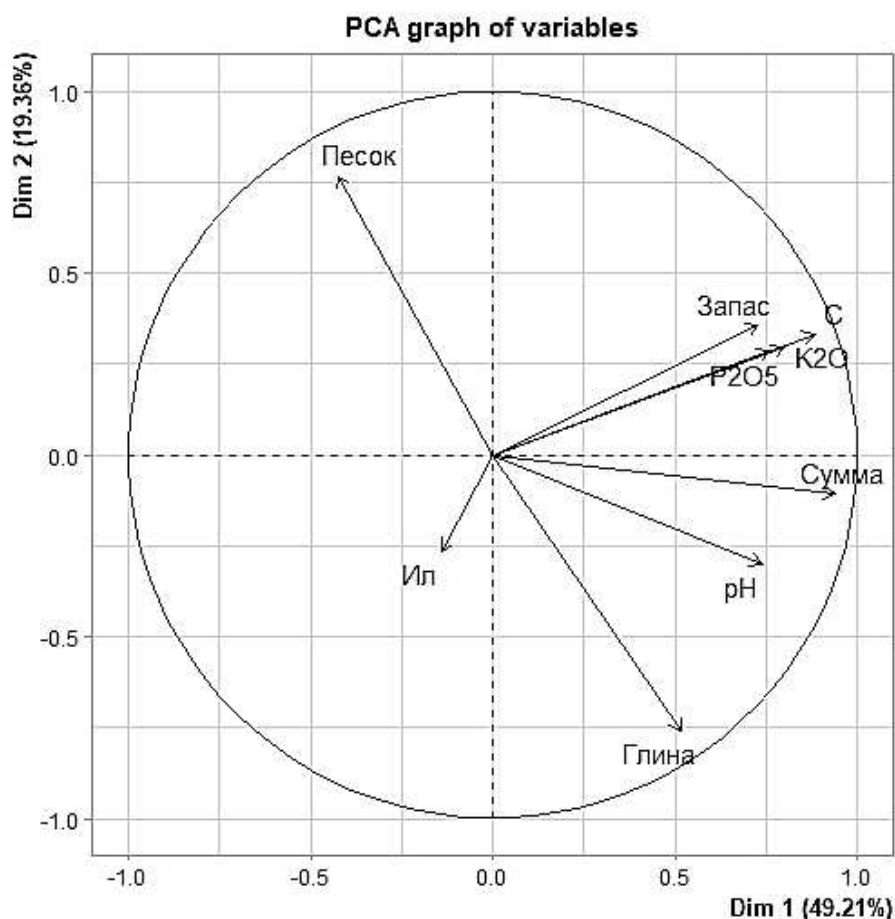


Рис. 3. Биplot с результатами РСА, выполненного для химических и физических параметров почв
 / Fig. 3. Principal component analysis (PCA) biplot of the chemical and physical properties of soils

Схожие данные были получены при анализе взаимосвязей содержания органического вещества, химических и физических параметров почв широколиственных лесов горных территорий Польши и Бразилии [16, 17]. На преимущественное участие тонкопылеватой фракции в накоплении органического углерода в профиле буроземов региона уже указывалось ранее, также

было установлено, что в почвах штата Колорадо (США) илестая фракция аккумулирует до 30 % углерода, а фракции тонкой и средней пыли – до 37 % [18, 19].

Тесные зависимости между физическими и химическими свойствами почв, содержанием в них доступных форм элементов питания растений и органического углерода (как и его запасом в слое 0–50 см) свидетельствуют, что типичные буроземы играют важную роль в экосистеме широколиственных лесов, выполняя функции депо питательных веществ и поддержания биоразнообразия. Для уточнения выявленных взаимосвязей запасов углерода в почвах с их гранулометрическим составом и положением в ландшафте необходимо продолжить исследования.

Заключение

Проведенные исследования показали, что на величину запасов углерода в типичных буроземах широколиственных лесов южного Приморья влияют экспозиция и крутизна склонов, состав древесной растительности, кислотность почв, их вещественный и гранулометрический состав. Тесные зависимости между физическими и химическими свойствами почв, содержанием в них питательных элементов и органического углерода подтверждают, что буроземы типичные в экосистеме широколиственных лесов выполняют функции хранилища питательных веществ и поддержания биоразнообразия. В южных отрогах Сихотэ-Алиня мощность гумусовых горизонтов невелика, а мощность профиля почв редко достигает 60 см, поэтому оценка запасов углерода в них до глубины 50 см вполне оправдана.

Список источников

1. Wei X., Shao M., Gale W., Li L. Global pattern of soil carbon losses due to the conversion of forests to agricultural land // Sci. Rep. 2014. № 4. Art. 4062.
2. Sidari M., Ronzello G., Vecchio G., Muscolo A. Influence of slope aspects on soil chemical and biochemical properties in a Pinus laricio forest ecosystem of Aspromonte (Southern Italy) // Eur. J. Soil Biol. 2008. Vol. 44. P. 364–372.
3. Глазунов Г.П., Афонченко Н.В., Двойных В.В. Оценка влияния морфометрических показателей рельефа на плодородие черноземных почв // Достижения науки и техники АПК. 2020. Т. 34, № 7. С. 10–18.
4. Кузнецова А.И. Влияние растительности на запасы почвенного углерода в лесах (обзор) // Вопросы лесной науки. 2021. Т. 4, № 4. С. 41–95.
5. Колесников Б.П. Растительность // Южная часть Дальнего Востока. М.: Наука, 1969. С. 206–250.
6. Научно-прикладной справочник по климату СССР. Серия 3: Многолетние данные. Приморский край. Л.: Гидрометеиздат, 1988. Ч. 1–6, вып. 26. 416 с.
7. Москалюк Т.А. Исследования на экологическом профиле «Горнотаёжный» (Южное Приморье) // Вестн. ДВО РАН. 2022. № 4 (224). С. 126–140.
8. Агрохимические методы исследования почв / отв. ред. А.В. Соколов. М.: Наука, 1975. 656 с.
9. Иванов Г.И. Почвообразование на юге Дальнего Востока. М.: Наука, 1976. 200 с.
10. Сапожников А.П., Селиванова Г.А., Ильина Т.М., Дюкарев В.Н., Бутовец Г.А., Гладкова Г.А., Гавренков Г.И., Жильцов А.С. Почвообразование и особенности биологического круговорота веществ в горных лесах Южного Сихотэ-Алиня (на примере Верхнеуссурийского стационара). Хабаровск: Дальневосточный науч.-исслед. ин-т лесного хозяйства (ДальНИИЛХ), 1993. 270 с.
11. Бессарабова А.А., Хавкина Н.В. Качественный состав гумуса и химическая характеристика гуминовых кислот бурых лесных почв Горнотаёжной станции // Экология дуба монгольского в Приморье. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 1981. С. 14–20.

Таблица 4 / Table 4

Результаты анализа PCA на основе данных о запасах углерода и основных свойствах почв / Results of PCA analysis based on data on carbon stocks and basic soil properties

Свойство почв	F1	F2
pH	0,741*	-0,302
C, %	0,885	0,333
Запас, т/га	0,728	0,356
P ₂ O ₅ , мг/100 г почвы	0,760	0,285
K ₂ O, мг/100 г почвы	0,799	0,295
Сумма поглощенных оснований, смоль(экв)/кг	0,939	-0,108
Глина, %	0,518	-0,76
Песок, %	-0,426	0,766
Ил, %	-0,141	-0,264

Примечание. **0,741*** – значимы при $p < 0,01$.

12. Zheng L.T., Chen H.Y. H., Yan E.R. Tree species diversity promotes litterfall productivity through crown complementarity in subtropical forests // *J. of Ecology*. 2019. Vol. 107, № 4. P. 1852–1861.

13. Басова Е.В., Лукина Н.В., Кузнецова А.И., Горнов А.В., Шевченко Н.Е., Тихонова Е.В., Гераскина А.П., Браславская Т.Ю., Тебенкова Д.Н., Луговая Д.Л. Качество древесного опада как информативный индикатор функциональной классификации лесов // *Вопросы лесной науки*. 2022. Т. 5, № 3. С. 1–21.

14. Честных О.В., Замолодчиков Д.Г., Уткин А.И. Общие запасы биологического углерода и азота в почвах лесного фонда России // *Лесоведение*. 2004. № 4. С. 30–42.

15. Chestnykh O.V., Grabovskiy V.I., Zamolodchikov D.G. Estimate of the soil carbon stock of forested regions in Russia using database of soil properties // *Contemporary Problems of Ecology*. 2022. Vol. 15, № 7. P. 731–740.

16. Kupka D., Gruba P. Effect of pH on the sorption of dissolved organic carbon derived from six tree species in forest soils // *Ecol. Indic.* 2022. Vol. 140. Art. 108975.

17. Bieluczyc W., Asselta F.O., Navroski D., Gontijo J.B., Venturini A.M., Mendes L., Simon C.P., Camargo P.B.D., Tadin A.M., Martin-Neto L., Bendassolli J.A., Rodrigues R.R., van der Putten W.H., Tsa S.M. Linking above and belowground carbon sequestration, soil organic matter properties, and soil health in Brazilian Atlantic Forest restoration // *J. of Environmental Management*. 2023. Vol. 344. Art. 118573.

18. Латышева Л.А. Органическое вещество гранулометрических фракций и его роль в формировании морфогенетического своеобразия буроземов острова Русский // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки*. 2022. № 4-2. С. 28–37.

19. Paul E.A. The nature and dynamics of soil organic matter: Plant inputs, microbial transformations, and organic matter stabilization // *Soil Biology & Biochemistry*. 2016. Vol. 98. P. 109–126.

References

1. Wei X., Shao M., Gale W., Li L. Global pattern of soil carbon losses due to the conversion of forests to agricultural land. *Sci. Rep.* 2014;(4):4062.

2. Sidari M., Ronzello G., Vecchio G., Muscolo A. Influence of slope aspects on soil chemical and biochemical properties in a Pinus laricio forest ecosystem of Aspromonte (Southern Italy). *Eur. J. Soil Biol.* 2008;44:364-372.

3. Glazunov G.P., Afonchenko N.V., Dvoinykh V.V. Influence of morphometric terrain indicators on the fertility of chernozem soils. *Dostizheniya nauki i tekhniki APK = Achievements of Science and Technology of AIC*. 2020;34(7):10-18. (In Russ.).

4. Kuznetsova A.I. Influence of vegetation on soil carbon stocks in forests (review). *Voprosy lesnoi nauki = Forest Science Issues*. 2021;4(4):41-95. (In Russ.).

5. Kolesnikov B.P. Vegetation. *The southern part of the Far East*. Moscow: Nauka Publ.; 1969:206-250. (In Russ.).

6. *Reference Book on Climate in the Soviet Union. Ser. 3: Long-Term Data. Primorskii Region*. Leningrad: Gidrometeoizdat Publ.; 1988;1-6(26). 416 p. (In Russ.).

7. Moskalyuk T.A. Researchers at the “Mountain-taiga” ecological profile (Southern Primorye). *Vestn. DVO RAN = Bulletin of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences*. 2022;(4):74-83. (In Russ.).

8. Sokolov A.V., ed. *Agrochemical methods of soil study*. Moscow: Nauka Publ.; 1975. 656 p. (In Russ.).

9. Ivanov G. I. *Soil formation in the southern Far East*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. 200 p. (In Russ.).

10. Sapozhnikov A.P., Selivanova G.A., Il'ina T.M., Dyukarev V.N., Butovets G.A., Gladkova G.A., Gavrenkov G. I., Zhil'tsov A. S. *Pedogenesis and Specific Biological Cycle of Substances in Mountainous Forests of the Southern Sikhote-Alin (by Example of Upper Ussuri Station)*. Khabarovsk: Far East Forestry Research Institute Press; 1993. 270 p. (In Russ.).

11. Bessarabova A.A., Khavkina N.V. Qualitative composition of humus and chemical characterization of humic acids of brown forest soils of Gornotayezhnaya station. *Ecology of Mongolian oak in Primorye*. Vladivostok: Far Eastern Branch of the USSR Academy of Sciences Press; 1981:14-20. (In Russ.).

12. Zheng L.T., Chen H.Y. H., Yan E.R. Tree species diversity promotes litterfall productivity through crown complementarity in subtropical forests. *J. of Ecology*. 2019;107(4):1852-1861.

13. Basova E.V., Lukina N.V., Kuznetsova A.I., Gornova A.V., Shevchenko N.E., Tikhonova E.V., Geraskina A.P., Braslavskaya T.Yu., Teben'kova D.N., Lugovaya D.L. Quality of wood litter as an informative indicator of functional classification of forests. *Voprosy lesnoi nauki = Forest Science Issues*. 2022;5(3):1-21. (In Russ.).

14. Chestnykh O.V., Zamolodchikov D.G., Utkin A.I. Reserve of biological carbon and nitrogen in soils of Russian forest fund. *Lesovedenie = Russian Forest Science*. 2004;(4):30-42. (In Russ.).

15. Chestnykh O.V., Grabovskiy V.I., Zamolodchikov D.G. Estimate of the soil carbon stock of forested regions in Russia using database of soil properties. *Contemporary Problems of Ecology*. 2022;15(7):731-740.

16. Kupka D., Gruba P. Effect of pH on the sorption of dissolved organic carbon derived from six tree species in forest soils. *Ecol. Indic.* 2022;140:108975.

17. Bieluczyk W., Asselta F.O., Navroski D., Gontijo J. B., Venturini A.M., Mendes L.W., Simon C.P., Camargo P.B.D., Tadini A.M., Martin-Neto L., Bendassolli J.A., Rodrigues R.R., van der Putten W.H., Tsai S.M. Linking above and belowground carbon sequestration, soil organic matter properties, and soil health in Brazilian Atlantic Forest restoration. *J. of Environmental Management.* 2023;344:118573.

18. Latysheva L.A. Organic matter of particle-size fraction and its role in the formation of morphogenetic specificity of burozems on Russky island. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2022;(4-2):28-37. (In Russ.).

19. Paul E.A. The nature and dynamics of soil organic matter: Plant inputs, microbial transformations, and organic matter stabilization. *Soil Biology & Biochemistry.* 2016;98:109-126.

Информация об авторах

Е.А. Жарикова – кандидат биологических наук, доцент, старший научный сотрудник.

О.М. Голодная – научный сотрудник.

Information about the authors

E.A. Zharikova – Candidate of Sciences (Biology), Associate Professor, Senior Researcher.

O.M. Golodnaya – Researcher.

Статья поступила в редакцию 12.04.2024; одобрена после рецензирования 15.08.2024; принята к публикации 16.10.2024.

The article was submitted 12.04.2024; approved after reviewing 15.08.2024; accepted for publication 16.10.2024.

Научная статья

УДК 581.9

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-106-115

НЕОГЕНОВЫЕ РЕЛИКТЫ ФЛОРЫ КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССИИ И ИХ ЗНАЧЕНИЕ ДЛЯ ПОНИМАНИЯ ФЛОРОГЕНЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА СЕВЕРНОМ КАВКАЗЕ

*Александр Львович Иванов*¹, *Унух Бекирович Узденов*^{2✉}, *Фатима Магомедовна Борлакова*³

^{1, 2, 3} Карачаево-Черкесский государственный университет им. У.Д. Алиева, Карачаевск,

Карачаево-Черкесская Республика, Россия

¹ ali-ivanov@mail.ru

² unuh@mail.ru✉

³ rfatimad@mail.ru

Аннотация. На основании анализа ареалов викарирующих и разъединённых видов, частично расположенных на территории Карачаево-Черкессии, подтверждается гипотеза миграции бореальной флоры, имевшей место в неогене, на Кавказ, с последующим образованием анклавных участков ареалов и началом видообразовательных процессов, которые привели к обособлению части видов, ставших в большинстве своём кавказскими эндемиками. Наличие двух категорий мигрантов (викарные и разъединённые виды) свидетельствует о гетерохронности миграционных процессов.

Ключевые слова: флора, неогеновый реликт, миграционный процесс, видообразование, Карачаево-Черкессия, викарный вид, разъединённый вид

Для цитирования: Иванов А.Л., Узденов У.Б., Борлакова Ф.М. Неогеновые реликты флоры Карачаево-Черкессии и их значение для понимания флорогенетических процессов на Северном Кавказе // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 106–115.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

NEOGENE RELICS OF THE FLORA OF KARACHAY-CHERKESSIA AND THEIR SIGNIFICANCE FOR UNDERSTANDING FLOROGENETIC PROCESSES IN THE NORTH CAUCASUS

*Alexander L. Ivanov*¹, *Unukh B. Uzdenov*^{2✉}, *Fatima M. Borlakova*³

^{1, 2, 3} Aliev Karachay-Cherkess State University, Karachayevsk, Karachay-Cherkess Republic, Russia

¹ ali-ivanov@mail.ru

² unuh@mail.ru✉

³ rfatimad@mail.ru

Abstract. Based on the analysis of the ranges of vicarious and separated species having part of the range in the territory of Karachay-Cherkessia, the hypothesis of migration of boreal flora to the Caucasus, which took place in the Neogene, with the subsequent formation of enclave areas of the ranges and the beginning of speciation processes, which led to the isolation of some species, which became mostly Caucasian endemics, is confirmed in the article. The presence of two categories of migrants (vicarious and disconnected species) indicates the heterogeneity of migration processes.

Keywords: flora, Neogene relic, migration process, speciation, Karachay-Cherkessia, vicar species, disconnected species

© Иванов А.Л., Узденов У.Б., Борлакова Ф.М., 2024

For citation: Ivanov A.L., Uzdenov U.B., Borlakova F.M. Neogene Relics of the Flora of Karachay-Cherkessia and Their Significance for Understanding Florogenetic Processes in the North Caucasus. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):106-115. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Явление реликтовости отражает исторические процессы формирования флоры, проходившие на фоне палеоклиматических трансформаций, связанных большей частью с древними её изменениями, захватывающими верхний миоцен, плиоцен, ледниковые и ксеротермические периоды плейстоцена, т.е. отрезок времени, составляющий приблизительно 6 млн лет. Эта категория видов относится к климатическим реликтам, формировавшимся в процессе изменения климата, начиная с палеогена-неогена.

Принадлежность к реликтовым элементам флоры определяется характером современных географических локусов, представляющих собой остатки некогда более обширных ареалов, изменившихся в связи с историческими событиями, происходившими не только на прилегающих территориях в какой-либо естественной флоре, но и на более обширных участках суши – на континентах. За пределами своего основного ареала реликтовый вид имеет более или менее ограниченное распространение.

Время вхождения реликтового вида в состав флоры может не соответствовать реальному возрасту вида. Если вид имеет третичный возраст, а вошёл в состав какой-либо флоры в ледниковые эпохи, то для данной флоры он будет ледниковым реликтом, а третичным он будет для той флоры, где этот вид образовался. Тем не менее наличие таких видов в составе флоры имеет важное значение для понимания исторических процессов становления флоры.

Климатическая реликтовость связана с изменениями климата в течение кайнозоя, преимущественно неогена и квартера, и миграционными процессами, протекавшими по градиенту изменения экологических условий обитания видов.

Цель исследования – установление хорологических связей неогеновых реликтов флоры Карачаево-Черкесии с бореальными, подтверждение гипотезы гетерохронности плиоценовых волн миграции бореальных видов на Кавказ.

Методика исследования

Исследование основано на анализе современных ареалов реликтовых видов флоры Карачаево-Черкесии, имеющих анклавные участки ареалов на Кавказе, определении потенциальной возможности плиоценовых миграционных перемещений отдельных видов и флористических комплексов из бореальной области на Кавказ с учётом палеоклиматических и палеоботанических данных.

Результаты исследования и их обсуждение

Существует мнение, что аркто-альпийские элементы на Кавказе – древнее явление, плиоценовое, и разрыв ареалов есть результат позднейших климатических изменений. Такой точки зрения придерживался А.А. Фёдоров [1] и некоторые другие исследователи [2–4]. В подтверждение этой точки зрения Р.В. Камелин [5] указал на наличие лакун (аномалии отсутствия) в кавказской флоре представителей некоторых родов, входивших в состав «плейстоценовой лесостепи», по которой они проникли в Европу, но не попали на Кавказ. Это преимущественно виды евро-азиатских родов (*Andromeda*, *Arctous*, *Chamaedaphne*, *Dendranthema*, *Larix*, *Ledum*, *Leontopodium* и др.) и европейских (*Cortusa*, *Soldanella*). То есть эти лакуны свидетельствуют о невозможности проникновения бореальных элементов на Кавказ в плейстоцене не только с севера, но и с востока. Эта точка зрения поддержана в [6].

Анализ ареалов видов флоры Карачаево-Черкесии показывает, что подобное развитие событий могло иметь место, поскольку существует значительное количество бореальных видов, име-

ющих анклавный участок ареала на Кавказе, который не может быть объяснён более поздними голоценовыми миграциями.

Движущей силой миграционных процессов является изменение физико-географических и климатических условий внешней среды. В плиоцене к таким изменениям относятся образование высокогорий с высотой до 4000 м н. у. м. [7], формирование Ставропольской возвышенности, обособление Черноморской котловины от Каспийской, соединение Кавказского полуострова с Русской равниной, трансгрессия и регрессия Каспия [8], появление лакколитов Кавминвод [9]. Колебания климата выражались в чередовании холодных и тёплых периодов, в акчагыле и апшероне на северном макросклоне появились первые горные оледенения: позднеакчагыльское (Эльбрусское) и апшеронское (Чегемское) [10], что могло способствовать бореализации флоры Кавказа. На северном берегу Маныча в акчагыле были распространены обширные бореальные леса, в которых обитали такие виды, как *Alnus incana*, *Betula alba*, *Carpinus betulus*, *Fagus orientalis*, *Quercus roburoides*, *Populus tremula* и др. [11]. По данным Н.А. Шёкиной [12], на юге Русской равнины в это время была распространена лесостепь с лесами из *Abies*, *Engelhardia*, *Fagus*, *Ostrya*, *Populus*, *Pterocarya*. А в окрестностях Владикавказа по данным спорово-пыльцевого анализа (Тарский торфяник) в состав апшеронского леса входили *Abies*, *Alnus*, *Betula*, *Carpinus*, *Corylus*, *Fagus*, *Picea*, *Pinus*, *Quercus*, *Salix*, реже встречались *Pterocarya*, *Ilex*, *Zelkova* и др. [13]. То есть в плиоцене кавказская флора носила вполне бореальный облик.

Все виды, попавшие на Кавказ в плиоцене, следует относить к третичным (плиоценовым) реликтам. Здесь они в настоящее время имеют анклавный характер ареала и находятся в географической изоляции. Часть из них трансформировалась в новые виды, ставшие викарными, другие не претерпели изменений, остались разьединёнными.

Викарирующих видов немного, некоторые из них не признаются самостоятельными и в базах данных IPNI (International Plant Names Index) и POWO (Plants of the World Online) относятся к синонимам (*Atropa caucasica*, *Carpinus caucasica*, *Convallaria transcaucasica*, *Dryas caucasica* и др.). Некоторые из них трактуются как подвиды (*Empetrum causicum*, *Tilia caucasica*, *Pyrus caucasica* и др.) или разновидности (*Caltha polypetala*, *Pinus sosnowskyi* и др.). Из перечисленных ниже 30 викарирующих видов лишь 11 являются признанными (*Abies nordmanniana*, *Antennaria caucasica*, *Arctostaphylos caucasica*, *Brunnera macrophylla*, *Corydalis caucasica*, *Fagus orientalis*, *Hedysarum causicum*, *Picea orientalis*, *Polemonium causicum*, *Salix caucasica*, *Viola caucasica*). Остальные виды мы считаем самостоятельными, поскольку сведения, приводимые в базах данных в Интернете или печатных изданиях, носят большей частью рекомендательный характер, и каждый исследователь вправе сам решать, анализируя всю совокупность анатомо-морфологических, экологических, хорологических и других факторов, самостоятелен какой-то конкретный вид или нет. Кроме того, в данном исследовании мы придерживаемся монотипической концепции вида, понимающей таксон в ранге вида в широком смысле без подразделения на подвиды и разновидности.

Викарирующие виды, занимающие одинаковые экологические ниши в бореальных областях и на Кавказе, в том числе и на территории КЧР, следующие:

1. *Abies nordmanniana* (Steven) Spach – преимущественно западнокавказский вид, южная граница ареала которого заходит в Турцию, по северному макросклону доходит до Северной Осетии. Викарирует с европейским видом *A. alba* Mill., от которого отличается более крупными в диаметре шишками и выемчатыми на верхушке у остроконечия кроющими чешуями [14].

2. *Antennaria caucasica* Voriss. – общекавказский географический тип, часть ареала которого заходит в Турцию по Лазистанскому хребту. Выделен из палеарктического *A. dioica* (L.) Gaertn., от которого отличается цветом корзинок, формой корзинок и листочков обёртки, формой и опушением прикорневых и стеблевых листьев с обеих сторон (а не только снизу), величиной и формой цветков и хохолков и другими признаками [15].

3. *Aquilegia caucasica* Vieb. (*A. olympica* Boiss.) – субкавказский географический тип, ареал которого, помимо Кавказа, заходит в Турцию и Иран. Викарен европейскому *A. vulgaris* L., от которого отличается более крупными цветками (5–8 см в диаметре (а не до 4,5 см) и более длинными листовками до 3 см длиной (а не до 2 см)) [16].

4. *Arctostaphylos caucasica* Lipsch. – эндемик Большого Кавказа, преимущественно северного макросклона. Часть ареала находится в северо-западном Закавказье. Викарен *A. uva-ursi* (L.) Spreng. – панбореальному географическому типу, распространённому в лесной зоне Северного

полушария, частично заходящего в тундру [17]. Отличительные особенности *A. caucasica* – более крупные и широкие листья, менее густая облиственность годовых побегов [18].

5. *Asarum ibericum* Steven ex Ledeb. (*A. intermedium* (C.A.Mey.) Grossh.; *A. causicum* (Dusch.) N. Busch) – кавказский эндемик, ареал которого охватывает северный макросклон Большого Кавказа, преимущественно западную и центральную части, и западное Закавказье. Викарирует с европейским *A. europaeum* L., от которого отличается округло-сердцевидными листьями, ко времени цветения снизу голыми (а не округло-почковидными, снизу покрытыми короткими волосками) и оливково-бурым околоцветником (а не коричнево-бурым) [19].

6. *Atropa caucasica* Kreyer – субкавказский географический тип, ареал которого выходит за пределы Кавказа в Турцию и Иран. Часто этот вид отождествляют с европейским *A. bella-donna* L., от которого он отличается цветом венчика (буровато-фиолетово-красноватым, а не грязно-буро-фиолетово-красноватым до грязно-тёмно-фиолетового) и голыми стеблями, покрытыми сильным налётом (а не железисто-пушистым, особенно под соцветием) [20].

7. *Betula litwinowii* Doluch. – эндемик Кавказа и северной части Лазистана, тяготеющий к верхней границе леса. Растёт вместе с палеарктическим видом *B. pendula* Roth. Ещё один близкородственный вид, растущий на Кавказе, – это евро-сибирский *B. pubescens* Ehrh. Отличия между этими видами сводятся к наличию или отсутствию железистых выделений на побегах в виде макроскопических гранул, опушения на молодых побегах и бородок волосков в углах жилок листьев, наклоном лопастей плодовых чешуй, формой листовой пластинки. Эти признаки сильно варьируют, так что в некоторых случаях отличить виды не представляется возможным [21].

8. *Brunnera macrophylla* (Bieb.) Johnst. – общекавказский географический тип, распространённый в тенистых лесах. Викарен сибирскому *B. sibirica* Steven, от которого отличается более мелкими листьями (4–7 см длиной, а не до 20), более мелким венчиком (3–4 мм в диаметре, а не 5–10), обильным и мягким опушением (а не бедным и жёстким) [22].

9. *Caltha polypetala* Hochst. – субкавказский географический тип, ареал которого заходит в Иран. Близкородственным видом является голарктический *C. palustris* L. *C. polypetala* отличается длинными прямыми, а не отклонёнными столбиками (3–4 мм, а не 1–1,5 мм длиной) и количеством чашелистиков, число которых может достигать 10 (а не 5) [23].

10. *Carpinus caucasica* Grossh. Распространён на Кавказе, в северном Иране, северной Турции. Викарен европейскому *C. betulus* L., от которого отличается более короткими листьями, тупой или закруглённой на верхушке средней лопастью плюски (а не заострённой), яйцевидным, сверху суженным орешком (а не овальным с остатками околоцветника на верхушке) [24, 25].

11. *Convallaria transcaucasica* Utkin ex Grossh. – кавказский эндемик, распространённый на Большом и Малом Кавказе. Входит в состав панбореального *C. majalis* L. s.l., распространённого в Европе, Сибири, Северной Америке. Дальневосточные популяции выделяются в *C. manshurica* (Kom.) Knorring, сахалинские – в *C. keiskei* Miq., кавказский анклав – в *C. transcaucasica* [26]. От *C. majalis* отличается более крупными размерами, в том числе цветка, цилиндрически-колокольчатый околоцветником (а не шаровидным), не расширенными треугольно к основанию нитями тычинок [27].

12. *Corydalis caucasica* DC. – общекавказский географический тип, заходящий на южной границе ареала в Турцию. Викарирует с европейским *C. intermedia* Merat, от которого отличается рыхлой прямой кистью (а не сжатой, почти головчатой, в начале цветения поникающей), пальчато-надрезанными на шиловидные дольки чашелистиками (а не зубчатыми), крупным (20–25 мм длиной) венчиком (а не до 15 мм), более длинными и узкими (до 20 мм длиной и до 3 мм шириной) коробочками (а не 10–15 мм длиной и 4–5 мм шириной) [28].

13. *Dictamnus causicus* (Fisch. et C.A.Mey.) Grossh. – общекавказский географический тип, южная граница ареала которого заходит в Иран. Викарен европейскому *D. albus* L., отличительными особенностями которого являются опушённые в верхней части стебли (а не железистые), листья с 3–8 парами листочков (а не 7–13), покрытой железками на ножке (а не сидячими) коробочкой [29].

14. *Empetrum causicum* Juz. – кавказский эндемик, полигамный вид, распространённый на Большом и Малом Кавказе, ареал которого заходит в Турцию по Лазистанскому хребту. Входит в состав полиморфного рода *E. nigrum* L. s.l., включающего в Евразии 9 видов, находящихся на ранних этапах дивергенции, что характеризуется образованием микровидов [30]. Видообразовательный процесс внутри рода способствовал расхождению признаков, прежде всего по полу (од-

нодомные, двудомные и полигамные виды) [31]. Близок к *E. subholarcticum* V.Vassil., распространённому в Сибири, на Дальнем Востоке, в Северной Америке, полигамному виду [32], отличающемуся от него лепестками венчика с зубчиком на верхушке и тычиночными нитями, которые в 2–2,5 раза длиннее лепестков (а не в 3–4) [33].

15. *Dryas caucasica* Juz. ex Woronow – эндемик Большого Кавказа, в отличие от циркумполярного *Dryas octopetala* L. имеет более крупные листья с большим количеством зубцов, более длинные цветочные стрелки, более крупные чашечку и венчик, 2–7 прицветников (у *D. octopetala* – 1 прицветник), несколько иной характер опушения [34].

16. *Fagus orientalis* Lipsky – субкавказский географический тип, помимо Кавказа распространён на юго-востоке Балканского полуострова, в северной Турции и северном Иране. Викарирует с европейским *F. sylvatica* L., от которого отличается большим количеством жилок листа, ширококолокольчатым околоцветником мужского цветка с 12 тычинками (в отличие от воронковидно-колокольчатого с 4–15 тычинками) и неодинаковыми придатками плюски, нижние из которых линейные или линейно-лопаччатые, верхние – шиловидные (у *F. sylvaticum* все шиловидные) [35].

17. *Gentiana schistocalyx* (С.Koch) С.Koch – общекавказский вид, заходящий краем ареала в Турцию и Иран. Викарен палеарктическому *G. asclepiadea* L., от которого отличается более крупной чашечкой, вдвое короче венчика, односторонне расщеплённой (а не втрое короче, цельной), лопастями венчика в 5–6 раз короче трубки (а не в 6–7) [36].

18. *Hedysarum caucasicum* Vieb. – эндемик Большого Кавказа, обитающий на субальпийских лугах. Викарен палеарктическому *H. hedysaroides* (L.) Schinz et Thell., от которого отличается количеством листочков листа (7–12, а не 6–9), тёмно-пурпуровым венчиком (а не светло-фиолетовым), узким крылом на членике боба (а не широким) и некоторыми другими признаками [37].

19. *Mentha caucasica* Gand. – общекавказский вид, распространённый в лесах и на сырых лугах Большого и Малого Кавказа, включая северную часть Лазистана. Замещает европейскую *M. longifolia* (L.) Huds., от которой отличается меньшей высотой (30–60 см, а не 100–180), по краю длинными и тонкими (а не крупными и неравными) пильчато-зубчатыми листьями, жёстковолосистым венчиком (а не тонкопушистым) [38].

20. *Paeonia caucasica* (Schipcz.) Schipcz. – западнокавказский вид, южная граница ареала которого заходит в Турцию, реликтовые участки ареала имеются в среднегорных лесах по рекам Кума, Подкумок и Малка. Близок к южноевропейско-малоазиатскому *P. mascula* (L.) Mill. (*P. corallina* Retz.), от которого отличается тупыми верхушками сегментов листа (а не внезапно заострёнными), белым густым опушением листовок (а не бронзовым) [39].

21. *Picea orientalis* (L.) Link – основной ареал вида находится в западном Закавказье и северной Турции, на северном макросклоне простирается в горной части от верховьев реки Белой до Терека, в Европе замещается *Picea excelsa* Link. Отличительными признаками являются более мелкие шишки (5–8 см длиной и до 2 см в диаметре, а не 10–16 и 3–4) и цельнокрайней семенной чешуёй (а не выгрызенно-зубчатой) [40].

22. *Pinus sosnowskyi* Nakai (*P. kochiana* Klotzsch., *P. hamata* (Stev.) Sosn.) – эндемик Кавказа и Северной Анатолии. От викарного евро-сибирского *P. sylvestris* L. отличается менее крупными, большей частью косыми шишками, строением семенных чешуй, щитки которых блестящие (лакированные), желтовато-бурые, более или менее вздутые и крючковидно загнутые к основанию чешуи [41].

23. *Polemonium caucasicum* N. Busch имеет два участка ареала – на Кавказе и в Средней Азии (Алтай, Тянь-Шань). Викарирует с евро-сибирским *P. caeruleum* L., от которого отличается более крупным венчиком (16–21 мм длиной, а не около 15 мм), широкообратояцевидной коробочкой (а не почти округлой), тычинками короче венчика (а не длиннее или равного ему). По мнению В.Н. Васильева, он близок к преимущественно сибирскому *P. villosum* Rudolph ex Georgi, и его можно считать промежуточным между этими двумя видами [42]. Что же касается азиатского участка ареала, то при более глубоком изучении там, возможно, будет выделен самостоятельный вид.

24. *Pyrus caucasica* Fed. – общекавказский географический тип, распространённый на Большом и Малом Кавказе. Викарным является европейская *Pyrus communis* L., у которой грушевидные плоды (а не шаровидные или сплюснуто-шаровидные), неколючие ветви (в отличие от ветвей с колючками), иной формы листья [36, 43].

25. *Salix caucasica* Anderss. – общекавказский вид, распространённый большей частью на Большом Кавказе и в западном Закавказье, включая Лазистан. В Европе замещается *S. aurita* L., от которой отличается обратноовальными или обратноланцетными листьями (а не ромбически-округлыми или продолговато-ланцетными), цилиндрическими серёжками (а не короткояцевидными) [25].

26. *Sorbus caucasica* Zinserl. – общекавказский вид, распространённый преимущественно на Большом Кавказе. Близок к североевропейскому *S. scandica* Fries, у которого лопасти листьев по верхнему краю с 1–2 зубцами (в отличие от цельных, без зубцов у *S. caucasica*) [44].

27. *Symphytum causicum* Vieb. – общекавказский географический тип, распространённый в светлых лесах, на лесных полянах, по берегам рек Большого и Малого Кавказа. Близок к европейскому *S. officinale* L., который также распространён и на территории Северного Кавказа, преимущественно в равнинной части и в среднегорьях на сырых лугах, по берегам озёр и рек. Первый отличается от второго до 1/3 надрезанной трубкой чашечки с тупыми лопастями (а не надрезанной на 2/3 и с острыми лопастями), голубым венчиком (а не грязно-фиолетовым), светлыми и морщинистыми орешками (а не гладкими блестящими чёрными). Здесь растёт ещё один близкородственный вид, ареал которого перекрывает ареалы предыдущих двух видов, – евро-кавказский *S. asperum* Leresch., отличающийся почти до основания надрезанной чашечкой с короткими лопастями, горбатыми, жилковато-морщинистыми орешками [45].

28. *Tilia caucasica* Rupr. – ареал вида охватывает Кавказ, заходит в Крым, северную Турцию и северный Иран. Растёт вместе с европейским видом *T. platyphyllos* Scop., от которого отличается более косо усечёнными основаниями листьев и наличием на их зубцах более длинных остей, отсутствием опушённости жилок листьев у фертильных побегов. В данном случае явление викаризма не наблюдается, поскольку на Кавказе ареалы двух видов совпадают и их чаще выделяют как подвиды европейского *T. platyphyllos* [46].

29. *Trollius ranunculinus* (Smith) Stearn (*T. patulus* Salisb.) – кавказско-североиранский вид, близкий к европейскому *T. europaeus* L., от которого отличается открытыми плоскими цветками (а не шаровидными, закрытыми из-за налегания краёв чашелистиков друг на друга) и рыхлой головкой плодов из 5–15 листовок (а не плотной шарообразной из многочисленных листовок) [47].

30. *Viola caucasica* Kolenati – общекавказский вид, основной ареал которого находится на Большом Кавказе. Замещает циркумполярный *V. biflora* L., от которого отличается укороченным корневищем, более длинными черешками листьев (до 15 см, а не до 10), более толстыми и более зубчатыми листовыми пластинками, более крупными цветками, гладкими по краю и голыми чашелистиками (а не зубчато-реснитчатыми) [48].

У перечисленных видов имеются значительные морфологические отличия от викарных видов, что свидетельствует о достаточно далеко зашедших процессах видообразования в условиях географической изоляции.

Вторая группа третичных реликтов относится к разъединённым видам, ареалы которых на Кавказе являются анклавными, достаточно обширными, но каких-либо значимых отличий между популяциями, обитающими в основном и анклавном ареалах, не выявлено. Эта проблема является предметом самостоятельного исследования. Возможно, при специальном изучении отличия могут быть выделены не только по анатомо-морфологическим признакам, но и на молекулярно-генетическом уровне.

Таких разъединённых видов довольно много, они преимущественно лесные и тундровые, последние обитают в высокогорьях Карачаево-Черкесии, поднимаясь до альпийского и субнивального поясов, основные ареалы которых находятся в разных фитоценозах Бореального подцарства (общеголарктические, панбореальные, палеарктические, евро-сибирские, европейские и плурирегиональные геоэлементы). Среди них – высшие споровые *Asplenium ruta-muraria*, *A. trichomanes*, *Equisetum hiemale*, *Gymnocarpium dryopteris*, *Huperzia selago*, *Lycopodium annotinum*, *Phyllitis scolopendrium*, *Polystichum braunii*, *P. setiferum*, *Polypodium vulgare*, *Selaginella helvetica*, *S. selaginoides*, *Thelypteris palustris* и другие; покрытосеменные *Actaea spicata*, *Daphne mezereum*, *Hypopitys monotropa*, *Linnaea borealis*, *Listera cordata*, *Moneses uniflora*, *Orthylia secunda*, *Oxalis acetosella*, *Pyrola rotundifolia*, *Rhodococcum vitis-idaea*, *Rubus saxatilis*, *Vaccinium myrtillus* и многие другие.

Ещё одна группа плиоценовых реликтов не имеет викарных связей с бореальной флорой, и их ареалы не являются анклавными. К ним относятся вечнозелёные покрытосеменные, преимущественно кавказские и эвксинские географические типы (некоторые в процессе видообразования

стали эндемичными), такие как *Daphne glomerata*, *Hedera caucasigena*, *Ilex stenocarpa*, *Laurocerasus officinalis*, *Rhododendron caucasicum*, *Rh. ponticum*. К этой же группе реликтов следует отнести и некоторые зимнезелёные виды, листья которых сохраняются в зимний период (живут 14–16 мес.) и отмирают на следующий год к июню – *Pachyphragma macrophyllum*. Среди зимнезелёных есть виды с более обширными ареалами – *Polystichum aculeatum*.

Незначительное число неогеновых реликтов демонстрирует дизъюнкцию некогда обширного евразийского ареала. Например, вечнозелёный кустарник *Euonymus nanus* Vieb. – общедревнесредиземноморский вид, ареал которого состоит из трёх отдалённых друг от друга участков: европейского Причерноморья на западе (юго-западная Украина, Молдавия, Румыния, Крым), центральная часть Северного Кавказа и на востоке – горы Центральной Азии (Тянь-Шань и Памиро-Алай), Внутренняя Монголия и северо-западный Китай. На территории Северного Кавказа известны шесть реликтовых локусов ареала этого вида (и более нигде на Кавказе его нет), находящихся на г. Бештау и г. Горячей (отрог г. Машук, locus classicus) в Ставропольском крае; в ущельях рек Чегем (окр. с. Булунгу) и Черек Безенгийский (окр. с. Безенги) в Кабардино-Балкарии. Есть такой реликтовый участок и в Карачаево-Черкесии – в ущелье р. Терберды и на хребте Большая Хатипара [49].

Выводы

Таким образом, реликтовость плиоценовых видов определяется анклавными участками ареалов на Кавказе, заходящими во многих случаях на прилегающие к югу территории Малой и Передней Азии. В настоящее время существует значительная пространственная отдалённость этих ареалов друг от друга, что создаёт их географическую изоляцию, способствующую аллопатрическому видообразованию. По-видимому, темпы эволюции неодинаковы для таких таксонов. По этой причине одни из них трансформировались в новые виды (викарные), другие – нет (разъединённые). Можно допустить и другое объяснение этого явления – разновременное проникновение на Кавказ, т.е. существование как минимум двух волн миграции – верхнемиоцен-нижнеплиоценовой и средне-верхнеплиоценовой (чему могли способствовать два упомянутых плиоценовых горных оледенения). Представители первой волны находились в изоляции более длительное время, их эволюция привела к видовому обособлению.

Анализ ареалов бореальных геоэлементов флоры Карачаево-Черкесии подтверждает гипотезу плиоценового проникновения на Кавказ мезофильных видов под влиянием изменения климата в сторону похолодания и образования анклавных участков ареалов, отделённых от северных территорий. Выявлена возможность гетерохронных волн миграции этих видов, поскольку некоторые из них прошли более длительный путь эволюции, обособившись в самостоятельные виды. Незначительная часть реликтов не имеет связей с бореальной флорой и является остатками флор прилегающих территорий Малой и Передней Азии, Закавказья.

Список источников

1. Федоров А.А. История высокогорной флоры Кавказа в четвертичное время как пример автохтонного развития третичной флористической основы // Материалы по четвертичному периоду СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 3. С. 230–248.
2. Толмачёв А.И. К истории возникновения и развития темнохвойной тайги. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954. 155 с.
3. Ильин М.М. Реликтовые элементы во флоре широколиственных лесов и их возможное происхождение // Проблемы реликтов во флоре СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938. Вып. 2. С. 26–31.
4. Васильев В.Н. Физико-географическая среда и видообразование. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1966. 75 с.
5. Камелин Р.В. Азиатские горные элементы во флоре Кавказа // Флора и растительность Алтая. Барнаул: Изд-во Алтайского ун-та, 1996. С. 5–22.
6. Иванов А.Л. Флора Предкавказья и её генезис. Ставрополь: Изд-во СГУ, 1998. 204 с.
7. Галушко А.И. Анализ флоры западной части Центрального Кавказа // Флора Северного Кавказа и вопросы её истории. Ставрополь, 1976. Вып. 1. С. 5–13.
8. Гроссгейм А.А. Растительный покров Кавказа. М.: Изд-во МОИП, 1948. 267 с.
9. Герасимов И.П. Пятигорские «лакколиты» и происхождение Кавказских Минеральных Вод // Геоморфология. 1974. № 3. С. 3–13.

10. Милановский Е.Е. Новейшая тектоника Кавказа. М.: Недра, 1968. 483 с.
11. Гричук В.П. Материалы к палеоботанической характеристике четвертичных и плиоценовых отложений северо-западной части Прикаспийской низменности // Тр. Ин-та географии. 1954. № 61. С. 5–79.
12. Щёкина Н.А. История флоры и растительности юга европейской части СССР в позднем миоцене – раннем плиоцене. Киев: Наукова думка, 1979. 198 с.
13. Тумаджанов И.И. К постплиоценовой истории лесной растительности Северного Кавказа // Тр. Тбилисского ботанического ин-та. 1955. № 17. С. 161–219.
14. Комаров В.Л. Род пихта – *Abies* Hill. // Флора СССР. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. Т. 1. С. 134–142.
15. Борисова А.Г. Род кошачья лапка – *Antennaria* Gaertn. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. Т. 25. С. 326–342.
16. Булавкина А.А. Род водосбор, орлики – *Aquilegia* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937. Т. 7. С. 86–99.
17. Буш Е.А. Род толокнянка – *Arctostaphylos* Adans. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 18. С. 83–84.
18. Лушницкий С.Ю. *Arctostaphylos caucasica* Lipsch. // Ботанические материалы гербария Ботанического института имени В.Л. Комарова АН СССР. 1961. Т. 21. С. 290.
19. Иванова Н.А. Род копытень – *Asarum* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. 5. С. 432–435.
20. Пояркова А.И. Род красавка – *Atropa* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1955. Т. 22. С. 71–75.
21. Меницкий Ю.Л. *Betula* L. // Конспект флоры Кавказа. СПб.; М.: КМК, 2012. Т. 3 (2). С. 293–295.
22. Ильин М.М. Реликтовые элементы во флоре широколиственных лесов и их возможное происхождение // Проблемы реликтов во флоре СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1938. Вып. 2. С. 26–31.
23. Шипчинский Н.В. Род калужница – *Caltha* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937. Т. 7. С. 35–42.
24. Бобров Е.Г. Род граб – *Carpinus* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1936. Т. 5. С. 254–262.
25. Гроссгейм А.А. Флора Кавказа. 2-е изд. Баку: Изд-во Азерб. филиала АН СССР, 1945. Т. 3. 322 с.
26. Кнорринг О.Э. Род ландыш – *Convallaria* L. // Флора СССР. Л.: Изд-во АН СССР, 1935. Т. 4. С. 467–468.
27. Гроссгейм А.А. Род ландыш – *Convallaria* L. // Флора Кавказа. Тифлис. 1928. Т. 1. С. 242.
28. Попов М.Г. Род хохлатка – *Corydalis* Medik. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937. Т. 7. С. 649–705.
29. Введенский А.И. Род ясенец – *Dictamnus* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 14. С. 227–232.
30. Куваев Б.Б., Василец В.Н., Краснов Е.А., Березовская Т.П. К диагностике и хемосистематике внутриродовых таксонов *Empetrum* (*Empetraceae*) // Бот. журн. 1996. № 10. С. 104–115.
31. Цвелёв Н.Н. Род *Empetrum* L. – шикша, вороника, водяника // Арктическая флора СССР. Л.: Наука, 1980. Вып. 8. С. 21–29.
32. Васильев В.Н. Род шикша – *Empetrum* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 14. С. 511–517.
33. Гроссгейм А.А. Флора Кавказа. 2-е изд. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1962. Т. 6. 424 с.
34. Юзепчук С.В. Род дриада – *Dryas* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1941. Т. 10. С. 264–279.
35. Соколов С.Я. Род *Fagus* L. – бук // Деревья и кустарники СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1951. Т. 2. С. 392–405.
36. Гроссгейм А.А. Флора Кавказа. 2-е изд. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 5. 456 с.
37. Федченко Б.А. Род копеечник – *Hedysarum* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. Т. 13. С. 259–318.
38. Борисова А.Г. Род мята – *Mentha* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 21. С. 596–628.
39. Шипчинский Н.В. Род пион – *Paeonia* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937. Т. 7. С. 24–35.
40. Комаров В.Л. Род ель – *Picea* Dietrich. // Флора СССР. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. Т. 1. С. 142–153.
41. Комаров В.Л. Род сосна – *Pinus* (Tournef.) L. // Флора СССР. Л.: Изд-во АН СССР, 1934. Т. 1. С. 159–173.
42. Васильев В.Н. Род синюха – *Polemonium* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, Т. 19. 1953. С. 78–92.
43. Малеев В.П. Род груша – *Pyrus* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1939. Т. 9. С. 336–357.
44. Комаров В.Л. Род рябина – *Sorbus* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1939. Т. 9. С. 372–406.
45. Попов М.Г. Род окопник – *Symphytum* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1953. Т. 19. С. 279–291.
46. Лория М.Л. Систематический обзор лип Кавказа // Бот. журн. 1967. Т. 52. № 12. С. 1789–1791.
47. Шипчинский Н.В. Род купальница – *Trollius* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1937. Т. 7. С. 42–53.
48. Юзепчук С.В. Род фиалка – *Viola* L. // Флора СССР. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1949. Т. 15. С. 350–479.
49. Красная книга Российской Федерации. М.: КМК, 2008. 855 с.

References

1. Fedorov A.A. History of the Caucasian high-mountain flora in the Quaternary as an example of autochthonous development of the Tertiary floristic basis. *Materials on the Quaternary Period of the USSR*. Moscow: USSR Academy of Sciences Press; 1952;3:230-248. (In Russ.).
2. Tolmachyov A.I. *To the history of origin and development of the dark coniferous taiga*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1954. 155 p. (In Russ.).
3. Ilyin M.M. Relict elements in the flora of broad-leaved forests and their possible origin. *Problems of relicts in the flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1938;(2):26-31. (In Russ.).
4. Vasiliev V.N. *Physico-geographical environment and speciation*. Moscow, Leningrad: Academy of Sciences of the USSR Press; 1966. 75 p. (In Russ.).
5. Kamelin R.V. Asian mountain elements in the flora of the Caucasus. *Flora and vegetation of Altai*. Barnaul: Altai University Press; 1996:5-22. (In Russ.).
6. Ivanov A.L. *Flora of the Pred-Caucasus and its genesis*. Stavropol: Stavropol State University Press; 1998. 204 p. (In Russ.).
7. Galushko A.I. Analysis of the flora of the western part of the Central Caucasus. *Flora of the North Caucasus and questions of its history*. Stavropol, 1976;(1):5-13. (In Russ.).
8. Grossheim A.A. *Vegetation cover of the Caucasus*. Moscow: Moscow Society of Nature Testers Press; 1948. 267 p. (In Russ.).
9. Gerasimov I.P. Pyatigorsk "laccoliths" and the origin of the Caucasian Mineral Waters. *Geomorfologiya = Geomorphology*. 1974;(3):3-13. (In Russ.).
10. Milanovsky E.E. *Newest Tectonics of the Caucasus*. Moscow: Nedra Publ.; 1968. 483 p. (In Russ.).
11. Grichuk V.P. Materials for paleobotanical characterization of Quaternary and Pliocene sediments of the northwestern part of the Caspian Lowland. *Tr. In-ta geografii = Proceedings of the Institute of Geography*. 1954;(61):5-79. (In Russ.).
12. Shchyokina N.A. *History of Flora and Vegetation of the South of the European part of the USSR in the Late Miocene - Early Pliocene*. Kiev: Naukova Dumka Publ.; 1979. 198 p. (In Russ.).
13. Tumadjanov I.I. To the post-Pliocene history of forest vegetation of the North Caucasus. *Tr. Tbilisskogo botanicheskogo in-ta = Proceedings of the Tbilisi Botanical Institute*. 1955;(17):161-219. (In Russ.).
14. Komarov V.L. Genus *Abies* Hill. *Flora of the USSR*. Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1934;1:134-142. (In Russ.).
15. Borisova A.G. Genus *Antennaria* Gaertn. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1959;25:326-342. (In Russ.).
16. Bulavkina A.A. Genus - *Aquilegia* L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1937;7:86-99. (In Russ.).
17. Bush E.A. The genus *Arctostaphylos* Adans. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1952;18:83-84. (In Russ.).
18. Lipschitz S.Y. *Arctostaphylos Caucasica* Lipsch. *Botanical materials of the herbarium of the V.L. Komarov Botanical Institute of the USSR Academy of Sciences*. 1961;21:290. (In Russ.).
19. Ivanova N.A. Genus *Asarum* L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1936;5:432-435. (In Russ.).
20. Poyarkova A.I. The Genus *Atropa* L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1955;22:71-75. (In Russ.).
21. Menitskii Yu.L. *Betula* L. *Conspectus of the flora of the Caucasus*. St. Petersburg, Moscow: KMK Publ.; 2012;3(2):293-295. (In Russ.).
22. Ilyin M.M. Relict elements in the flora of broad-leaved forests and their possible origin. *Problems of relicts in the flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1938;(2):26-31. (In Russ.).
23. Shipchinsky N.V. Genus *Caltha* L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1937;7:35-42. (In Russ.).
24. Bobrov E.G. Genus *Carpinus* L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1936;5:254-262. (In Russ.).
25. Grossheim A.A. *Flora of the Caucasus*. 2nd ed. Baku: Azerbaijan branch of the USSR Academy of Sciences Press; 1945:3. 322 p. (In Russ.).
26. Knorring O.E. Genus *Convallaria* L. *Flora of the USSR*. Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1935;4:467-468. (In Russ.).
27. Grossheim A.A. Genus *Convallaria* L. *Flora of the Caucasus*. Tiflis, 1928;1:242. (In Russ.).
28. Popov M.G. Genus *Corydalis*. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1937;7:649-705. (In Russ.).
29. Vvedensky A.I. The genus *Jasenets* - *Dictamnus* L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1949;14:227-232. (In Russ.).

30. Kuvaev B.B., Vasilets V.N., Krasnov E.A., Berezovskaya T.P. To diagnostics and chemosystematics of intrageneric taxa of Empetrum (Empetraceae). *Bot. zhurn. = Botanical Journal*. 1996;(10):104-115. (In Russ.).
31. Tsvelyov N.N. Genus Empetrum L. *Arctic Flora of the USSR*. Leningrad: Nauka Publ.; 1980;8:21-29. (In Russ.).
32. Vasiliev V.N. Genus Empetrum L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1949;14:511-517. (In Russ.).
33. Grossheim A.A. *Flora of the Caucasus*. 2nd ed. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1962;6. 424 p. (In Russ.).
34. Yuzepchuk S.V. Genus Dryas L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1941;10:264-279. (In Russ.).
35. Sokolov S.Ya. Genus Fagus L. *Trees and Shrubs of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1951;2:392-405. (In Russ.).
36. Grossheim A.A. *Flora of the Caucasus*. 2nd ed. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1952;5. 456 p. (In Russ.).
37. Fedchenko B.A. Genus Kopechnik - Hedysarum L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1948;13:259-318. (In Russ.).
38. Borisova A.G. Genus Mentha L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1954;21:596-628. (In Russ.).
39. Shipchinsky N.V. Genus Paeonia L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1937;7:24-35. (In Russ.).
40. Komarov V.L. Genus - Picea Dietrich. *Flora of the USSR*. Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1934;1:142-153. (In Russ.).
41. Komarov V.L. Genus - Pinus (Tourn.) L. *Flora of the USSR*. Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1934;1:159-173. (In Russ.).
42. Vasiliev V.N. Genus Polemonium L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1953;19:78-92. (In Russ.).
43. Maleev V.P. Genus - Pyrus L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1939;9:336-357. (In Russ.).
44. Komarov V.L. Genus - Sorbus L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1939;9:372-406. (In Russ.).
45. Popov M.G. The genus Symphytum L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1953;19:279-291. (In Russ.).
46. Loria M.L. Systematic review of Caucasian lindens. *Bot. zhurn. = Botanical Journal*. 1967;52(12):1789-1791. (In Russ.).
47. Shipchinsky N.V. Genus Trollius L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1937;7:42-53. (In Russ.).
48. Yuzepchuk S.V. Genus - Viola L. *Flora of the USSR*. Moscow, Leningrad: USSR Academy of Sciences Press; 1949;15:350-479. (In Russ.).
49. *Red Book of the Russian Federation*. Moscow: KMK Publ.; 2008. 855 p. (In Russ.).

Информация об авторах

А.Л. Иванов – доктор биологических наук, профессор кафедры биологии и химии, естественно-географический факультет.

У.Б. Узденов – кандидат биологических наук, доцент кафедры биологии и химии, естественно-географический факультет.

Ф.М. Борлакова – старший преподаватель кафедры биологии и химии, естественно-географический факультет.

Information about the authors

A.L. Ivanov – Doctor of Science (Biology), Professor of the Department of Biology and Chemistry, Faculty of Natural Geography.

U.B. Uzdеноv – Candidate of Science (Biology), Associate Professor of the Department of Biology and Chemistry, Faculty of Natural Geography.

F.M. Borlakova – Senior Lecturer, Department of Biology and Chemistry, Faculty of Natural Geography.

*Статья поступила в редакцию 25.04.2024; одобрена после рецензирования 26.06.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 25.04.2024; approved after reviewing 26.06.2024; accepted for publication 16.10.2024.*

Научная статья

УДК 663.125/663.252.4

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-116-124

ТОЛЕРАНТНОСТЬ ДРОЖЖЕЙ *S. CEREVISIAE* К ПОВЫШЕННЫМ КОНЦЕНТРАЦИЯМ ГЛЮКОЗЫ И ЭТАНОЛА

Эльвира Ахмедовна Исламгагомедова^{1✉}, Эсланда Абдурахмановна Халилова²,
Аида Алевдиновна Абакарова³, Динара Алиевна Аливердиева⁴

^{1, 2, 3, 4} Прикаспийский институт биологических ресурсов Дагестанского федерального исследовательского центра РАН, Махачкала, Республика Дагестан, Россия

¹islammagomedova@mail.ru✉

²eslanda61@mail.ru

³aida.abakarva@rambler.ru

⁴aliverdieva_d@mail.ru

Аннотация. Эта статья – один из этапов изучения метаболизма дрожжей в ответ на различные виды стресса. Рассмотрены морфологические свойства клеток и гигантских колоний различных штаммов дрожжей *S. cerevisiae*: 985-Т, используемого в производстве спирта, лабораторного стандартного S288с и Y-503, рекомендуемого как для производства хлебопекарных дрожжей, так и для биосинтеза этанола. Сравнительные исследования проведены на стандартных и модифицированных твердых средах YPD при температуре 37 °С. В результате изучения одновременного влияния геотермальной воды, глюкозы, этанола в составе твердых сред культивирования в условиях повышенной температуры на морфологические свойства клеток и гигантских колоний *S. cerevisiae* Y-503, S288с, 985-Т отмечена физиологическая активность всех исследуемых культур. При культивировании штаммы отличались размерами, формой клеток, наличием запасных питательных веществ: метахроматина, гликогена, липидов. Показано изменение цвета, поверхности, профиля и размера колоний. В данных условиях культивирования наибольшей толерантностью к стрессовым факторам среды обладали коллекционный (*S. cerevisiae* Y-503) и промышленный (985-Т) штаммы. Изучение морфофизиологических механизмов толерантности дрожжей к высоким концентрациям глюкозы, этанола и температуры представляет интерес для отбора устойчивых к стрессу селекционных штаммов с целью дальнейшего применения в биотехнологических процессах.

Ключевые слова: штаммы *S. cerevisiae*, глюкоза, этанол, геотермальная вода, морфология, клетки, гигантские колонии

Для цитирования: Исламгагомедова Э.А., Халилова Э.А., Абакарова А.А., Аливердиева Д.А. Толерантность дрожжей *S. cerevisiae* к повышенным концентрациям глюкозы и этанола // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 116–124.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

TOLERANCE OF *S. CEREVISIAE* YEAST TO ELEVATED CONCENTRATIONS OF GLUCOSE AND ETHANOL

Elvira A. Islammagomedova^{1✉}, Eslanda A. Khalilova², Aida A. Abakarova³, Dinara A. Aliverdieva⁴

^{1, 2, 3, 4} Caspian Institute of Biological Resources, Dagestan Federal Research Center, Russian Academy of Sciences, Makhachkala, Republic of Dagestan, Russia

¹islammagomedova@mail.ru✉

²eslanda61@mail.ru

³aida.abakarva@rambler.ru

⁴aliverdieva_d@mail.ru

© Исламгагомедова Э.А., Халилова Э.А., Абакарова А.А., Аливердиева Д.А., 2024

Abstract. Our research is one of the stages in studying yeast metabolism in response to various types of stress. The morphological properties of cells and giant colonies of various yeast strains *S. cerevisiae* are considered: 985-T, used in the production of alcohol, laboratory standard S288c and Y-503, recommended both for the production of baker's yeast and the biosynthesis of ethanol. Comparative studies were carried out on standard and modified YPD solid media at temperature of 37 °C. As a result of studying the simultaneous influence of geothermal water, glucose, and ethanol in the composition of solid culture media under elevated temperature conditions on the morphological properties of cells and giant colonies of *S. cerevisiae* Y-503, S288c, 985-T, the physiological activity of all studied cultures was noted. During cultivation, the strains differed in size, cell shape, and the presence of reserve nutrients: metachromatin, glycogen, and lipids. Changes in color, surface, profile and size of colonies are shown. Under these cultivation conditions, the collection *S. cerevisiae* Y-503 and industrial 985-T strains had the greatest tolerance to environmental stress factors. The study of the morphophysiological mechanisms of yeast tolerance can serve as the basis for the selection of strains resistant to high concentrations of glucose and ethanol, which is of interest for their further use in biotechnological processes.

Keywords: *S. cerevisiae* strains, glucose, ethanol, geothermal water, morphology, cells, giant colonies

For citation: Islammagomedova E.A., Khalilova E.A., Abakarova A.A., Aliverdieva D.A. Tolerance of *S. cerevisiae* Yeast to Elevated Concentrations of Glucose and Ethanol. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):116-124. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

В технологическом процессе синтеза биологически активных вторичных метаболитов дрожжи часто подвергаются одновременному действию нескольких стресс-факторов. В спиртовой промышленности актуальным является применение технологии сбраживания высококонцентрированного сусле, однако при этом дрожжи испытывают повышенные уровни температурного, осмотического и этанольного стрессов [1]. В данных экстремальных условиях в дрожжевой клетке установлено увеличение размеров митохондрий, повышение численности и размеров пероксисом, накопление полифосфатных и липидных гранул, индукция стресс-белков [2–5]. Происходящие при различных видах стресса биохимические преобразования способствуют изменению морфологических показателей дрожжей рода *Saccharomyces*. Индивидуальные свойства клеток и определенный состав среды культивирования оказывают влияние на формирование гигантских колоний, характеристика которых дает возможность рассматривать и оценивать морфологические особенности дрожжей [6, 7]. Известно, что использование термотолерантных дрожжей увеличивает скорость превращения глюкозы в этанол [8, 9]. Температурный стресс влияет на размер, форму клеток и гигантских колоний дрожжей *S. cerevisiae* [2, 7]. Увеличение концентрации глюкозы способствует преобразованию поверхности дрожжевых клеток; сокращению их размера, восстанавливаемого во время адаптации; замедлению клеточных диффузионных процессов и деформации мембран [10]; росту колонии, при этом экспрессия генов, участвующих в метаболизме углеводов, зависит от источника и концентрации глюкозы [11]. В условиях этанольного стресса для клеток характерно наличие ярко выраженных инвагинаций цитоплазматической мембраны [2, 3]. Интерес представляет сравнение высокотолерантного к этанолу штамма 985-T, используемого в производстве спирта, с лабораторным стандартным S288c, а также со штаммом Y-503, рекомендуемым как для производства хлебопекарных дрожжей, так и для биосинтеза этанола. Ранее в результате наших исследований была разработана модифицированная твердая питательная среда для выращивания дрожжей, содержащая геотермальную воду из скважины № 36 Махачкалинского месторождения. Предложенный состав среды представляет интерес для дальнейшего использования ее в микробиологических исследованиях [12].

Цель работы – изучение влияния повышенной температуры, геотермальной воды, глюкозы, этанола в составе твердых сред культивирования дрожжей на морфологические свойства клеток и гигантских колоний *S. cerevisiae* Y-503, S288c, 985-T.

Методика эксперимента

Объекты исследования – штаммы *S. cerevisiae* S288с [13], 985-Т [14], Y-503 [15] и среднеинерализованная, со слабощелочной реакцией среды геотермальная вода из скважины № 36 (Республика Дагестан).

I этап – $T=30$ °С. Для культивирования дрожжей использовались питательные среды YPD-агар. Контроль (К): дрожжевой экстракт – 0,5 % (BD, США), пептон – 0,5 % (BD, США), глюкоза (D-глюкоза) – 2,0 % (Merk, Германия), агар-агар – 2,5 % (Difco, Нидерланды), дистиллированная вода; опыт₁ (O₁): дрожжевой экстракт – 0,5 %, пептон – 0,5 %, глюкоза – 2,0 %, агар-агар – 2,5 %, геотермальная/дистиллированная вода в соотношении 1:1; опыт₂ (O₂): дрожжевой экстракт – 0,5 %, пептон – 0,5 %, глюкоза – 2,0 %, агар-агар – 2,5 %, геотермальная/дистиллированная вода в соотношении 2:1; опыт₃ (O₃): дрожжевой экстракт – 0,5 %, пептон – 0,5 %, глюкоза – 20,0 %, этанол – 12,0 %, агар-агар – 2,5 %; дистиллированная вода.

II этап – $T=37$ °С. Используемые среды: контроль (К): дрожжевой экстракт – 0,5 %, пептон – 0,5 %, глюкоза – 20,0 %, этанол – 12,0 %, агар-агар – 2,5 %; дистиллированная вода; опыт (O): дрожжевой экстракт – 0,5 %, пептон – 0,5 %, глюкоза – 20,0 %, этанол – 12,0 %, агар-агар – 2,5 %; геотермальная/дистиллированная вода в соотношении 1:1. Выращивание колоний осуществляли на чашках Петри при pH 4,5 в течение 10 сут. Кислотность среды корректировалась 1N HCl (Россия). Для обнаружения в протоплазме метакроматина клетки окрашивали карболовым фуксином Циля; для выявления гликогена – раствором Люголя; липидов – раствором судана («Судан III»). Морфологию клеток (величина, форма, способ вегетативного размножения) изучали при увеличении $\times 1000$. Использовались приборы: микроскоп CX21 (Olympus, Япония), инкубатор микробиологический BINDERBF 115 (Германия), бокс ламинарный ВЛ-12 1000 (Россия), цифровая фотокамера Canon Power Shot A 640 (Япония), автоклав Tuttnauer 2540 (Израиль), весы аналитические DV215CD (Ohaus Discovery, Швейцария), шкаф сушильный SNOL 67/350 (Utenos, Литва), pH-метр «Анион 4100» («Анион», Россия).

Эксперимент включал три повторных опыта. Статистическую обработку результатов, полученных в процессе работы, проводили методом малой выборки с вычислением средних арифметических значений и среднестатистических ошибок.

Результаты и обсуждение

Сравнительный анализ морфологических свойств дрожжей *S. cerevisiae* Y-503, S288с и 985-Т показал, что исследуемые штаммы обладают характерными особенностями. Установлено, что при культивировании на контрольной среде YPD-агар при 30 °С форма клеток штамма Y-503 в основном была овально-округлой, в меньшем количестве – округлой; клетки 985-Т – овальные, небольшое количество – округлые; штамм S288с отличался округлой формой (рис. 1а). Средние размеры клеток в популяциях штаммов Y-503 и 985-Т были почти идентичны и значительно превышали показатели S288с (табл. 1). При культивировании на средах YPD-агар с использованием геотермальной воды в концентрации 1:1 клетки штаммов Y-503 и 985-Т стали более округлыми, при этом в обеих колониях обнаружены клетки удлинённой формы; в популяции S288с сохранилась округлая форма (рис. 1б). Наблюдалось незначительное уменьшение средних размеров клеток Y-503 и 985-Т; отмечается появление больших шарообразных клеток 985-Т и достаточная однородность размеров клеток S288с. Вариант среды YPD-агар с использованием геотермальной воды в концентрации 2:1 продемонстрировал наличие удлинённых клеток Y-503, клетки округло-овальной, в меньшем количестве – округлой и овальной формы в колониях Y-503 и 985-Т; округлые клетки S288с (рис. 1в). Размеры клеток были идентичны с предыдущими вариантами. Во всех колониях выявлены запасные питательные вещества (липиды, метакроматин, гликоген) и почкующиеся клетки (табл. 1).

В результате сравнительного анализа параметров колоний, выращенных на контрольной среде, установлено, что для всех штаммов характерна форма в виде цветка: треугольная – S288с, округлая – 985-Т, овальная – Y-503 (рис. 2а). Во всех вариантах обнаружена радиально исчерченная поверхность; плоский, с выпуклым центром профиль; светло-бежевый цвет и пастообразная, мажущаяся структура. При этом размеры колоний Y-503 значительно превышали показа-

тели S288c и 985-T (табл. 1). При культивировании на средах YPD-агар с использованием геотермальной воды обнаружены некоторые изменения морфологических параметров колоний дрожжей по сравнению с контрольным вариантом (рис. 2б, в). Все колонии имели овальную и удлиненную форму, размеры колоний варьировали в зависимости от концентрации геотермальной воды в составе среды культивирования. В варианте O₁ (разбавление 1:1) средние размеры колоний несколько превышали контроль; в варианте O₂ (разбавление 2:1) – были значительно меньше (кроме Y-503).

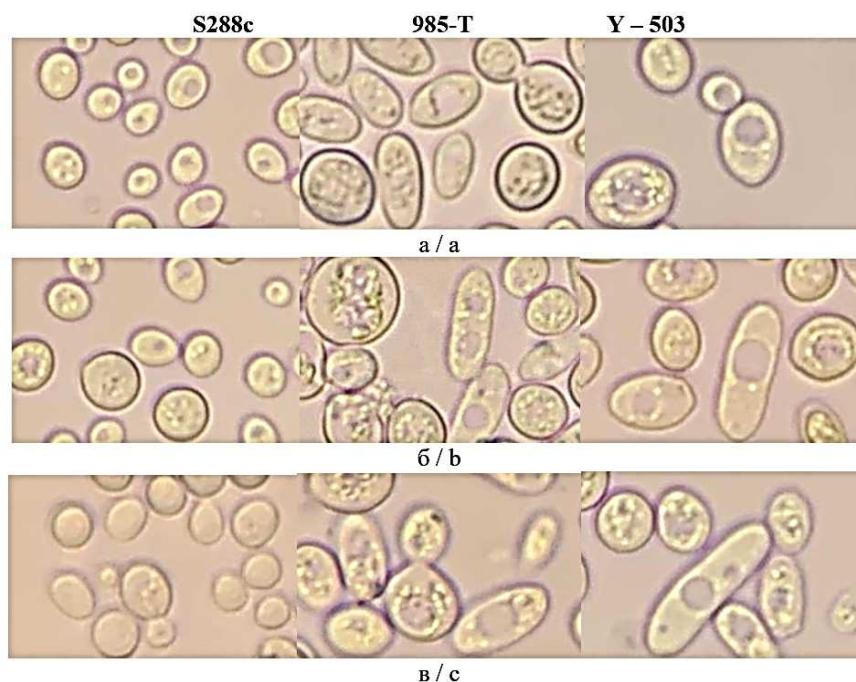


Рис. 1. Клетки штаммов *S. cerevisiae* S288c, 985-T и Y-503 при выращивании на средах YPD-агар: а – К – с использованием дистиллированной воды; б – O₁ – с геотермальной водой, разбавление 1:1; в – O₂ – с геотермальной водой, разбавление 2:1. T=30 °C / Fig. 1. Cells of *S. cerevisiae* strains S288c, 985-T and Y-503 when grown on YPD-agar media: a - K - using distilled water; b - O₁ - with geothermal water, dilution 1:1; c - O₂ - with geothermal water, dilution 2:1. T=30 °C

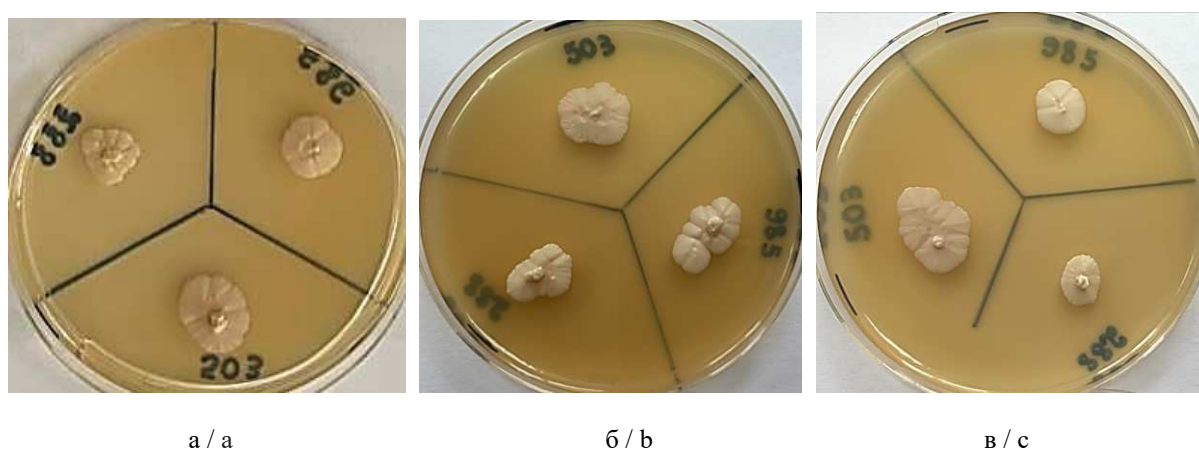


Рис. 2. Изменение формы и размеров гигантских колоний штаммов *S. cerevisiae* S288c, 985-T и Y-503 при выращивании на средах YPD-агар: а – К – с использованием дистиллированной воды; б – O₁ – с геотермальной водой, разбавление 1:1; в – O₂ – с геотермальной водой, разбавление 2:1. T=30 °C / Fig. 2. Changes in the shape and size of giant colonies of *S. cerevisiae* strains S288c, 985-T and Y-503 when grown on YPD-agar media: a - K - using distilled water; b - O₁ - with geothermal water, dilution 1:1; c - O₂ - with geothermal water, dilution 2:1. T=30 °C

Обнаружено, что при выращивании на среде, содержащей глюкозу и этанол, и температуре культивирования 30 °С форма клеток не отличалась от контрольного варианта YPD-агар: клетки штамма S288с были округлыми; 985-Т – овальными, небольшое количество – округлыми; Y-503 – в основном овально-округлыми (рис. 3а). Средние размеры клеток Y-503 и 985-Т, превышающие показатели S288с, по сравнению с контролем несколько уменьшились (табл. 1). При рассмотрении морфологических особенностей штаммов установлено, что для всех гигантских колоний была характерна округлая форма (рис. 3б); радиально исчерченная поверхность; плоский, с выпуклым центром профиль. Обнаружено изменение цвета – колонии приобретали темно-бежевый цвет с легким блеском – и уменьшение размера всех колоний, при этом средние размеры колоний 985-Т и Y-503 были идентичны и значительно превышали показатели S288с.

Таблица 1 / Table 1

Колонии и клетки дрожжей *S. cerevisiae* Y-503, S288с, 985-Т в зависимости от состава среды культивирования. T=30 °C / Colonies and cells of yeast *S. cerevisiae* Y-503, S288с, 985-Т depending on the composition of cultivation medium. T=30 °C

		Варианты сред			
Штамм		Контроль: дистиллированная вода	O ₁ : геотермальная /дистиллированная вода 1:1	O ₂ : геотермальная /дистиллированная вода 1:2	O ₃ : дистиллированная вода, глюкоза 20 %, этанол 12 %
S288с	1	12,5×12,5	16,0×12,0	12,5×10,5	9,5×7,5
	2	5×5±0,4; 4×4±0,4	6×6±0,4; 5×5±0,4	6×5±0,4; 5×5±0,4; 4×4±0,4	5×5±0,4; 4×4±0,4
	3	1,0	1,0	1,5	2,0
985-Т	1	13,0×12,5	17,0×12,5	14,0×13,0	13,0×11,0
	2	9×5±0,4; 8×5±0,4; 6×6±0,4	9×9±0,4; 8×5±0,4; 7×7±0,4; 6×6±0,4	9×6±0,4; 7×6±0,4; 6×5±0,4	8×5±0,4; 7×6±0,4; 6×5±0,4
	3	1,5	1,5	2,0	1,5
Y-503	1	17,5×14,5	19,0×15,0	23,0×15,5	13,0×12,0
	2	8×6±0,4; 7×5±0,4; 6×5±0,4	8×5±0,4; 6×6±0,4; 6×5±0,4	12×5±0,4; 7×5±0,4; 6×4±0,4	8×5±0,4; 7×5±0,4; 6×5±0,4
	3	2,0	1,0	1,5	2,0

Примечание. 1 – средний размер колонии, мм; 2 – средний размер клеток, мм; 3 – количество почкующихся клеток, %.

Для анализа толерантности дрожжей к тепловому стрессу чашки Петри инкубировали при 37 °С. Установлено, что как в контрольной (с использованием дистиллированной воды), так и в опытной (с использованием геотермальной воды, разбавление 1:1) средах форма клеток штамма S288с в основном была округлой, 985-Т – овальной, Y-503 – овально-округлой (рис. 4). Средние размеры клеток штаммов Y-503 и 985-Т значительно превышали показатели S288с (табл. 2).

В клетках обнаружены метахроматин, гликоген и липиды – накопление запасных веществ, очевидно, способствует формированию адаптивного ответа клеток дрожжей на повышенное содержание глюкозы и этанола в среде культивирования.

Происходящие в условиях одновременного термо-, осмо- и этанольного стресса морфологические изменения клеток оказали влияние и на параметры гигантских колоний, формирование которых представляет собой результат скоординированного действия клеток. Для всех колоний была характерна округлая (неправильная) форма и темно-бежевый цвет с легким блеском

(рис. 5). Установлено, что варианты колоний S288с и 985-Т имели плоский профиль. Штамм Y-503 отличался выпуклым профилем с биомассой, сконцентрированной в центре колонии. По сравнению с контролем обнаружено небольшое увеличение среднего размера всех колоний, что демонстрирует эффективность использования в среде культивирования дрожжей геотермальной воды из скважины № 36. При этом наибольшей толерантностью обладал промышленный штамм *S. cerevisiae* 985-Т.

Таблица 2 / Table 2

Колонии и клетки дрожжей *S. cerevisiae* Y-503, S288с, 985-Т в зависимости от состава среды культивирования. T=37 °C / Colonies and cells of yeast *S. cerevisiae* Y-503, S288с, 985-Т depending on the composition of cultivation medium. T=37 °C

Варианты среды			
Штамм		Контроль: дистиллированная вода, глюкоза 20 %, этанол 12 %	Опыт: геотермальная /дистиллированная вода 1:1, глюкоза 20 %, этанол 12 %
S288с	1	8,5×7,5	10,5×9,0
	2	6×6±0,4; 4×4±0,4	6×6±0,4; 5×5±0,4
	3	1,5	1,5
985-Т	1	10,0×9,5	12,5×11
	2	9,5×8; 9×7±0,4; 8×6±0,4	8×6±0,4; 7×6±0,4
	3	1,0	1,5
Y-503	1	15,0×10,0	10,5×8,5
	2	9×7±0,4; 8×6±0,4	8×6±0,4; 6×5±0,4
	3	1,5	1,0

Примечание. 1 – средний размер колонии, мм; 2 – размер клеток, мм; 3 – количество почкующихся клеток, %.

Применяемая концентрация этанола в условиях повышенной температуры вызывала достаточно высокий уровень стресса, что подтверждалось задержкой роста дрожжей. Результаты нашего эксперимента в экстремальных условиях показали преимущество штаммов 985-Т и Y-503 по сравнению с S288с. Небольшие различия в толерантности к этанолу между 985-Т и Y-503 могут быть связаны с генетически предопределенными специфическими особенностями дрожжей, спонтанно проявляющимися во время культивирования штаммов.

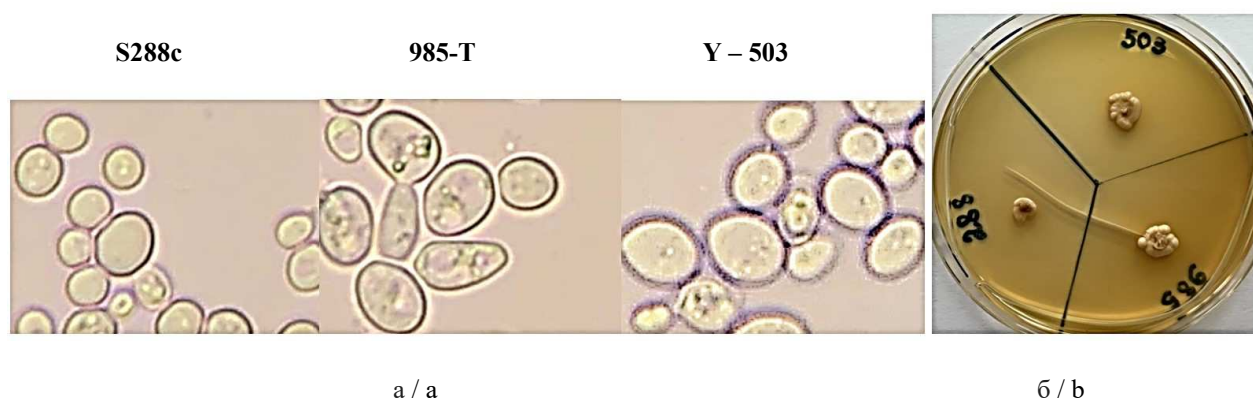


Рис. 3. Среда YPD-агар, содержащая 20 % глюкозы и 12 % этанола, 30 °C: а – клетки; б – гигантские колонии штаммов *S. cerevisiae* S288с, 985-Т и Y-503 / Fig. 3. YPD-agar medium containing 20 % glucose and 12 % ethanol, 30 °C: a - cells; б - giant colonies of *S. cerevisiae* strains S288с, 985-Т and Y-503

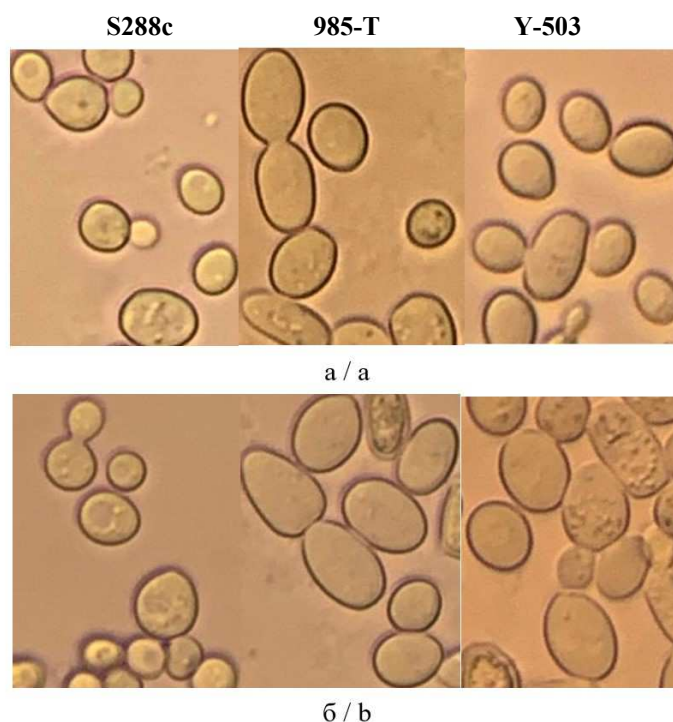


Рис. 4. Клетки штаммов *S. cerevisiae* S288c, 985-T, Y-503. Среда YPD-агар, содержащая 20 % глюкозы и 12 % этанола: а – контроль с использованием дистиллированной воды; б – опыт с геотермальной водой, разбавление 1:1. T=37 °C / Fig. 4. Cells of *S. cerevisiae* strains S288c, 985-T, Y-503. YPD-agar medium containing 20 % glucose and 12 % ethanol: a - control using distilled water; b - experiment with geothermal water, dilution 1:1. T=37 °C

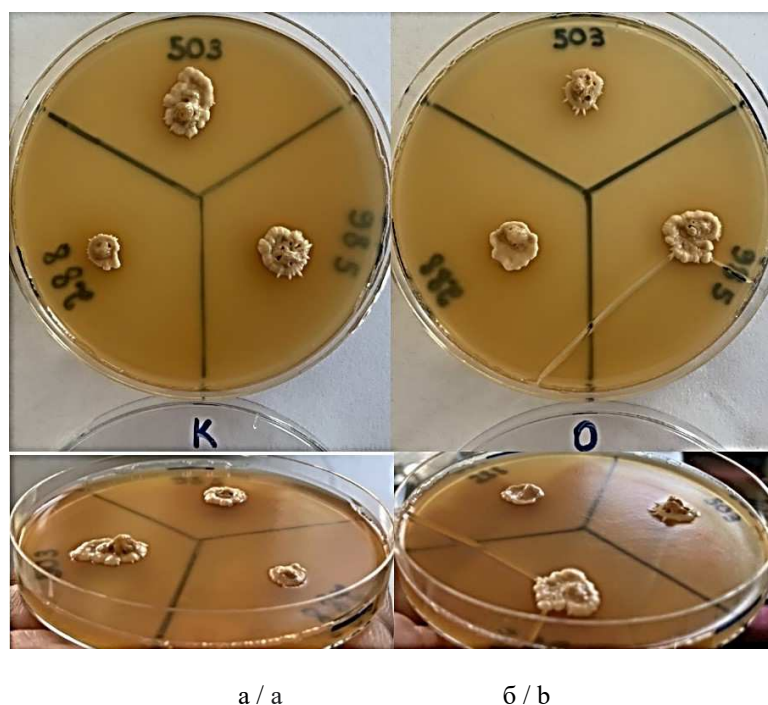


Рис. 5. Гигантские колонии штаммов *S. cerevisiae* S288c, 985-T, Y-503. Среда YPD-агар, содержащая 20 % глюкозы и 12 % этанола: а – контроль с использованием дистиллированной воды; б – опыт с геотермальной водой, разбавление 1:1, T=37 °C / Fig. 5. Giant colonies of *S. cerevisiae* strains S288c, 985-T, Y-503. YPD-agar medium containing 20 % glucose and 12 % ethanol: a - control using distilled water; b - experiment with geothermal water, dilution 1:1. T=37 °C

Заключение

Высокая осмо- и спиротолерантность дрожжей *S. cerevisiae*, определяющаяся многочисленными генетическими факторами и условиями культивирования, имеет важное научное и промышленное значение. Наши исследования, проводимые с использованием лабораторных (Y-503, S288c) и промышленного (985-T) штаммов *S. cerevisiae*, являются одним из этапов изучения метаболизма дрожжей в ответ на различные виды стресса. В результате изучения одновременного влияния геотермальной воды, глюкозы, этанола в составе твердых сред культивирования в условиях повышенной температуры на морфологические свойства клеток и гигантских колоний *S. cerevisiae* Y-503, S288c, 985-T установлена физиологическая активность всех исследуемых культур. При этом штаммы отличались размерами, формой клеток, наличием запасных питательных веществ. Показано изменение цвета, поверхности, профиля и размера колоний. В данных условиях культивирования наибольшей толерантностью к стрессовым факторам среды обладали штаммы *S. cerevisiae* Y-503 и 985-T. Исследования морфофизиологических механизмов адаптации дрожжей могут послужить основой для селекции штаммов, устойчивых к высоким концентрациям глюкозы и этанола, что представляет интерес для их дальнейшего применения в биотехнологических процессах.

Список источников

1. Reis V.R., Antonangelo A.T.B.F., Bassi A.P.G., Colombi D., Ceccato-Antonini S. Bioethanol strains of *Saccharomyces cerevisiae* characterized by microsatellite and stress resistance // Brazilian J. of Microbiology. 2017. Vol. 48, № 2. P. 268–274. Doi: org/10.1016/j.bjm.2016.09.017.
2. Brown A.J.P., Cowen L.E., Pietro A. Di., Quinn J. Stress adaptation // Microbiol Spectr. 2017. Vol. 4. P. 1011–1021.
3. Аринбасарова А.Ю., Бирюкова Е.Н., Меденцев А.Г. Антистрессовые системы дрожжей *Yarrowia lipolytica* (обзор) // Прикладная биохимия и микробиология. 2015. Т. 51, № 2. С. 122–131.
4. Sipiczki M. Yeast two and three species hybrids and high sugar fermentation // Microbial Biotechnology. 2019. Vol. 12, № 6. P. 1101–1108. Doi: 10.1111/1751-7915.13390.
5. Mohd Azhar S.H., Abdulla R., Jambo A., Marbawi H., Gansau J.A., Faik A.A.M., Rodrigues K.F. Yeast unsustainable bioethanol production: A review // Biochemistry and Biophysics Reports. 2017. Vol. 9. P. 52–61. Doi: org/10.1016/j.bbrep.2017.03.003.
6. Viana N.C., Portugal C., Cruz S.H. Morphophysiological and molecular characterization of wild yeast isolates from industrial ethanol process // African J. of Microbiology Research. 2017. Vol. 11, № 37. P. 1422–1430. Doi: 10.5897/AJMR2017.8691.
7. Zemančíková J., Kodedova M., Papoušková K., Sychrova H. Four *Saccharomyces* species differ in their tolerance to various stresses though they have similar basic physiological parameters // Folia Microbiol. 2018. Vol. 63. P. 217–227. Doi: org/10.1007/s12223-017-0559-y.
8. Saini P., Beniwal A., Kokkiligadda A., Vij S. Response and tolerance of yeast to changing environmental stress during ethanol fermentation // Proc. Biochem. 2018. Vol. 72. P. 1–12. Doi: 10.1016/j.procbio.2018.07.001.
9. Chamnipa N., Thanonkeo S., Klanrit P., Thanonkeo P. The potential of the newly isolated thermotolerant yeast *Pichia kudriavzevii* RZ8-1 for high-temperature ethanol production // Braz. J. Microbiol. 2018. Vol. 49, № 2. P. 378–391. Doi: 10.1016/j.bjm.2017.09.00278.
10. Caspeta L., Nielsen J. Thermotolerant yeast strains adapted by Laboratory evolution show trade-off at ancestral temperatures and preadaptation to other stresses // MBio. 2015. Vol. 6, № 4. P. 431–446. Doi: 10.1128/mBio.00431-15.
11. Marinkovic Z.S., Vulin C., Actan M., Song M., Meglio J.-M.D., Lindner A.B., Hersen P. A micro fluidic device for inferring metabolic landscapes in yeast monolayer colonies // eLife. 2019. Vol. 8. P. 1–21. Doi: org/10.7554/eLife.47951.
12. Пат. 2804446 РФ. МПК С 12Q 1/100. Питательная среда для культивирования дрожжей *Saccharomyces* / Э.А. Халилова, Э.А. Исламмагомедова, А.А. Абакарова, Д.А. Аливердиева. Заявл. 19.12.2022. Оpubл. 29.09.2023.
13. URL: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov> (Taxonomy ID: 559292)-19 (дата обращения: 19.01.2024).
14. Гернет А.М. Разработка способа получения спиртовых дрожжей с использованием термотолерантного и осмофильного штамма *Saccharomyces cerevisiae* 985-T и электрохимически активированных растворов: автореф. дис. ... канд. техн. наук. М., 2000. 25 с.
15. А.с. 1284998 СССР. 1987. МПК С 12 N 1/18// (С 12 N 1/18, С 12 R 1:865). Штамм дрожжей *Saccharomyces cerevisiae* Y-503, используемый в производстве хлебобулочных изделий / Ш.А. Абрамов, С.Ц. Котенко, Б.И. Далгатова, А.Т. Маммаев, Д.С. Пейсахова. Заявл. 09.04.1985. Оpubл. 23.01.1987.

References

1. Reis V.R., Antonangelo A.T.B.F., Bassi A.P.G., Colombi D., Ceccato-Antonini S. Bioethanol strains of *Saccharomyces cerevisiae* characterized by microsatellite and stress resistance. *Braz. J. Microbiol.* 2017;48(2):268-274. Doi: org/10.1016/j.bjm.2016.09.017.
2. Brown A.J.P., Cowen L.E., Pietro A. Di., Quinn J. Stress adaptation. *Microbiol Spectr.* 2017;4:1011-1021.
3. Arinbasarova A.Yu., Biryukova E.N., Medentsev A.G. Anti-stress systems of yeast *Yarrowia lipolytica* (Review). *Prikladnaya biokhimiya i mikrobiologiya = Applied Biochemistry and Microbiology.* 2015;51(2):122-131. (In Russ.).
4. Sipiczki M. Yeast two and three species hybrids and high sugar fermentation. *Microbial Biotechnology.* 2019;12(6):1101-1108. Doi: 10.1111/1751-7915.13390.
5. Mohd Azhar S.H., Abdulla R., Jambo A., Marbawi H., Gansau J.A., Faik A.A.M., Rodrigues K.F. Yeast sustainable bioethanol production: A review. *Biochemistry and Biophysics Reports.* 2017;9:52-61. Doi: org/10.1016/j.bbrep.2017.03.003.
6. Viana N.C., Portugal C., Cruz S.H. Morphophysiological and molecular characterization of wild yeast isolates from industrial ethanol process. *African Journal of Microbiology Research.* 2017;11(37):1422-1430. Doi: 10.5897/AJMR2017.8691.
7. Zemančikova J., Kodedova M., Papouškova K., Sychrova H. Four *Saccharomyces* species differ in their tolerance to various stresses though they have similar basic physiological parameters. *Folia Microbiol.* 2018;63:217-227. Doi: org/10.1007/s12223-017-0559-y.
8. Saini P., Beniwal A., Kokkiligadda A., Vij S. Response and tolerance of yeast to changing environmental stress during ethanol fermentation. *Proc. Biochem.* 2018;72:1-12. Doi: 10.1016/j.procbio.2018.07.001.
9. Chamnisa N., Thanonkeo S., Klanrit P., Thanonkeo P. The potential of the newly isolated thermotolerant yeast *Pichia kudriavzevii* RZ8-1 for high-temperature ethanol production. *Braz. J. Microbiol.* 2018;49(2):378-391. Doi: 10.1016/j.bjm.2017.09.00278.
10. Caspeta L., Nielsen J. Thermotolerant yeast strains adapted by Laboratory evolution show trade-off at ancestral temperatures and preadaptation to other stresses. *MBio.* 2015;6(4):431-446. Doi: 10.1128/mBio.00431-15.
11. Marinkovic Z.S., Vulin C., Acman M., Song M., Meglio J.-M.D., Lindner A.B., Hersen P. A micro fluidic device for inferring metabolic landscapes in yeast monolayer colonies. *eLife.* 2019;8:1-21. Doi: org/10.7554/eLife.47951.
12. Khalilova E.A., Islammagomedova E.A., Abakarova A.A., Aliverdieva D.A. *Nutrient medium for cultivating the yeast Saccharomyces.* Certificate 2804446 RF. MPK C 12Q 1/100. Appl. December 19, 2022. Publ. September 29, 2023. (In Russ.).
13. Available from: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov> [Accessed 19th January 2024] (Taxonomy ID: 559292)-19 (In Russ.).
14. Gernet A.M. *Development of a method for producing alcoholic yeast using the thermotolerant and osmophilic strain Saccharomyces cerevisiae 985-T and electrochemically activated solutions.* Dissertation Thesis. Moscow, 2000. 25 p. (In Russ.).
15. Abramov Sh.A., Kotenko S.Ts., Dalgatova B.I., Mammaev A.T., Peysakhova D.S. *Yeast strain Saccharomyces cerevisiae Y-503, used in the production of bakery products.* Certificate 1284998 SSSR. MPK C 12 N 1/18. Appl. April 9, 1985. Publ. January 23, 1987. (In Russ.).

Информация об авторах

Э.А. Исламмагомедова – кандидат биологических наук, старший научный сотрудник, лаборатория биохимии и биотехнологии.

Э.А. Халилова – кандидат биологических наук, старший научный сотрудник, лаборатория биохимии и биотехнологии.

А.А. Абакарова – старший лаборант, лаборатория биохимии и биотехнологии.

Д.А. Аливердиева – кандидат биологических наук, старший научный сотрудник, заведующая лабораторией биохимии и биотехнологии.

Information about the authors

E.A. Islammagomedova – Candidate of Science (Biology), Senior Researcher, Laboratory of Biochemistry and Biotechnology.

E.A. Khalilova – Candidate of Science (Biology), Senior Researcher, Laboratory of Biochemistry and Biotechnology.

A.A. Abakarova – Senior Assistant, Laboratory of Biochemistry and Biotechnology.

D.A. Aliverdieva – Candidate of Science (Biology), Senior Researcher, Head of Laboratory of Biochemistry and Biotechnology.

Статья поступила в редакцию 11.06.2024; одобрена после рецензирования 10.09.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 11.06.2024; approved after reviewing 10.09.2024; accepted for publication 16.10.2024.

Научная статья

УДК 631:58.01/07:635.92:712

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-125-133

РОЛЬ И ОСОБЕННОСТИ ПРОИЗРАСТАНИЯ ДЕКОРАТИВНЫХ ДРЕВЕСНЫХ РАСТЕНИЙ В ГОРОДСКИХ ЗОНАХ РЕКРЕАЦИИ

Надежда Михайловна Кузьмина

Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук, Ижевск, Удмуртская Республика, Россия
kuzmina1956@mail.ru

Аннотация. При подборе посадочного материала для ландшафтного строительства необходимо знать, смогут ли новые культуры приспособиться к существующему биоценозу парков и нормально развиваться в зоне корневой системы средневозрастных деревьев. Исследуемые нами 33 вида древесных растений произрастают в окружении *Populus balsamifera* L., *Tilia cordata* Mill. 40–50-летнего возраста. В работе представлены систематические данные и происхождение исследуемых видов древесных растений. Выявлено три группы по декоративности: 1-я – высокодекоративные древесные растения, два вида (*Berberis thunbergii* DC, *Cornus alba* L.); 2-я – декоративные древесные растения, 25 видов; 3-я – менее декоративные растения, 6 видов. Форма и величина листьев древесных растений играют существенную роль в зрительном восприятии, а величина растения определяет его место в садово-парковой композиции. Выявлено 5 групп по величине листа, три категории по высоте у деревьев и 4 категории у кустарников. Выделена группа красивоцветущих древесных растений, 16 видов (48,5 %) и представлена фенология цветения в период 2021–2023 гг. Определена зависимость начала цветения от погодных условий в климатической зоне Среднего Предуралья. Согласно данным наблюдений, в 2016–2023 гг. установлено три группы устойчивости декоративных качеств древесных растений, произрастающих в зоне корневой системы средневозрастных деревьев первой величины: высокоустойчивые – 40 % (11 видов); устойчивые – 45 % (12 видов); слабоустойчивые – 15 % (4 вида).

Ключевые слова: древесные растения, декоративность, фенология цветения, морфология, особенности произрастания в зоне корневой системы средневозрастных деревьев

Для цитирования: Кузьмина Н.М. Роль и особенности произрастания декоративных древесных растений в городских зонах рекреации // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2024. № 4-1. С. 125–133.

Статья опубликована на условиях лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International (CC-BY 4.0).

Original article

ROLE AND FEATURES OF GROWING ORNAMENTAL WOODY PLANTS IN URBAN RECREATIONAL AREAS

Nadezhda M. Kuzmina

Udmurt Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk, Udmurt Republic, Russia
kuzmina1956@mail.ru

Abstract. When selecting planting material for landscape construction, it is necessary to know whether new crops can adapt to the existing biocenosis of parks and develop normally in the zone of the root system of middle-aged trees. The 33 species of woody plants we studied grow surrounded by *Populus balsamifera* L., *Tilia cordata* Mill. 40-50 years of age. The paper presents systematic data and the origin of the studied woody plant species. Three decorative groups have been identified. Group 1 of highly ornamental woody plants included only two species (*Berberis thunbergii* DC, *Cornus alba* L.). Mostly ornamental woody plants (group 2) grow in the garden - 25 species. Group 3 of less ornamental plants includes 6 species. The shape and size of

the leaves of woody plants play a significant role in visual perception, and the size of the plant determines its place in the landscape composition. Five groups of leaf size, three categories of height for trees, and four categories for shrubs were identified. A group of beautifully flowering woody plants has been identified - 16 species (48.5 %) and the phenology of flowering in the period 2021-2023 is presented. The dependence of the beginning of flowering on weather conditions in the climatic zone of the Middle Urals has been determined. According to observation data in the period 2016-2023. Three groups of stability of decorative qualities of woody plants growing in the zone of the root system of middle-aged trees of the first size have been identified. Highly resistant – 40 % (11 species). Resistant – 45 % (12 species). Weakly resistant – 15 % (4 species).

Keywords: woody plants, decorativeness, flowering phenology, morphology, features of growth in the zone of the root system of middle-aged trees

For citation: Kuzmina N.M. Role and Features of Growing Ornamental Woody Plants in Urban Recreational Areas. *Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science.* 2024;(4-1):125-133. (In Russ.).

This is an open access article distributed under the terms of Creative Commons Attribution 4.0 International License (CC-BY 4.0).

Введение

Многие сады и парки городов России построены в советское время и нуждаются в реконструкции. Растения сложившихся за это время фитоценозов живут по своим законам развития. Для того чтобы органично вписать в существующее пространство новые виды растений, необходимо сохранить уже сложившийся биоценоз – динамичную систему, способную к саморегулированию [1].

Реконструкция имеющихся и создание новых садов и парков приводят к увеличению спроса материала для зелёного строительства. Основным материалом для озеленения рекреационных зон являются декоративные деревья и кустарники. Их главные качества – эффектное и красочное цветение, оригинальные формы кроны, необычное строение и окраска листвы, яркие плоды. Оттенки красного и желтого осенней окраски листвы и плодов у многих декоративных растений обладают стимулирующим действием и вызывают у человека положительные эмоции, совсем не лишние в пору увядания природы [2].

Качество декоративности деревьев и кустарников зависит от условий местопроизрастания. Определение состояния кустарников сотрудниками Саратовского аграрного университета им. Н.И. Вавилова в насаждениях г. Саратова показало, что многие их виды при выращивании на различных объектах озеленения общего пользования изменяют свою декоративность и жизнённость [3–5]. Сотрудниками Всероссийского научно-исследовательского института агролесомелиорации установлено, что в новых условиях произрастания исследуемые кустарники изменяют ритм развития и роста, что влияет на формирование их габитуса [6].

При подборе посадочного материала для ландшафтного строительства необходимо знать, смогут ли новые культуры приспособиться к существующему биоценозу парков и нормально развиваться в зоне корневой системы средневозрастных деревьев. Принято считать, что корневая система деревьев в верхних слоях почвы разрастается в пределах ширины кроны.

Исследуемые нами 33 вида декоративных древесных растений произрастают в окружении *Populus balsamifera*, *Tilia cordata* 40–50-летнего возраста, их корневая система имеет ширину кроны 8–13 м [7]. Можно предположить, что примерная граница зоны корневой системы находится на удалении 5 м от стволов деревьев. Эти деревья – одни из основных ландшафтообразующих древесных пород во многих парках городов России. Поэтому изучение биоэкологических особенностей исследуемых декоративных видов древесных пород, произрастающих в зоне корневой системы средневозрастных деревьев (на примере г. Ижевска), весьма актуально.

Ижевск находится в Среднем Предуралье и является столицей Удмуртской Республики. Его климат – умеренно континентальный. Характеризуется продолжительной многоснежной зимой, теплым летом и переходными сезонами – весной и осенью [8]. Погодные условия в период исследований 2021–2023 гг. представлены в табл. 1.

По метеорологическим данным г. Ижевска 2021–2023 гг. отмечены различные погодные условия первой половины вегетационного периода (табл. 1). Переход среднесуточной температуры

на активные (+ 10 °С) для теплолюбивых древесных растений в 2021 г. произошел 14 апреля, но стабильно среднесуточная температура была выше + 10 °С только с 1 мая. В 2022 г. первой точкой перехода на + 10 °С зафиксировано 25 апреля, стабильно + 10 °С отмечается с 27 мая, в 2023 г. 23 апреля можно считать точкой стабильного перехода на активные температуры + 10 °С [9].

Таблица 1 / Table 1

Среднемесячные метеорологические данные периода исследований апрель – июнь, 2021–2023 гг.
/ Average monthly meteorological data for the study period April-June, 2021-2023

Период исследования	Среднемесячная температура среды, °С	Фактическая среднемесячная температура, °С	Отклонение от нормы, °С	Осадки, мм		
				Норма	Выпало	Отклонение от нормы, %
Апрель 2021	4	5,4	1,4	29	58	203
Апрель 2022	4	4,8	0,8	29	52	182
Апрель 2023	4	7,9	3,9	29	1	4
Май 2021	12,3	16,9	4,6	45	21	47
Май 2022	12,3	9,7	-2,6	45	43	96
Май 2023	12,3	15,7	3,4	45	2	5
Июнь 2021	17	20,3	3,3	62	32	51
Июнь 2022	17	15,7	-1,3	62	110	174
Июнь 2023	17	14,9	-2,1	62	17	27

Объекты и методы исследований

Объектом исследования является территория сада непрерывного цветения, созданного отделом интродукции и акклиматизации растений УдмФИЦ УрО РАН, г. Ижевск. С 2006 г. (начало создания коллекции) автором ведется наблюдение за устойчивостью декоративных растений в условиях местопроизрастания. В коллекции представлено 33 вида древесных растений и 259 видов и сортов декоративных травянистых многолетников [10].

Сад состоит из трех частей с разными условиями произрастания растений: открытая солнечная часть, полузакрытая сухая тень, горка. При использовании древесных растений создано несколько миксбордеров, которые разделяются между собой дорожками с плавными изгибами. На заднем плане участка и непосредственно на территории сада произрастают средневозрастные деревья первой величины: *Populus balsamifera*, *Tilia cordata* [11].

При оценке декоративности древесных видов культур автором было рассмотрено несколько уже готовых шкал декоративности [12, 13]. За основу взята шкала, разработанная сотрудниками Ботанического сада – института Уфимского научного центра РАН; оценивались декоративные качества видов и форм рода *Acer* с использованием переводных коэффициентов, которые определяют значимость того или иного признака декоративности [12]. Так как у нас видовой состав древесных растений разнообразный (в том числе хвойные растения), оценка декоративности формы кроны и листьев была взята из методики, авторы которой – сотрудники Ботанического института Академии наук Абхазии [13]. Эта оценка больше подходит для хвойных и лиственных культур с простыми и сложными листьями.

Полученная шкала включает в себя 11 основных пунктов (признаков): период декоративности (ПД), декоративность цветков и плодов (ЦП), цвет коры (ЦК), форма кроны (ФК), формы и размеры листьев и хвои (ФЛ), летняя окраска листвы (ОЛ), осенняя окраска листвы (ОО), период осеннего окрашивания (ПО), оригинальность (ОР), жизненное состояние растений (СР), зимостойкость (З).

По суммарной балльной оценке (Σ) выделены следующие группы декоративности (ГД): I – высокодекоративные (80–100 баллов), II – декоративные (50–79 баллов), III – менее декоративные (менее 50) [12].

Распределение древесных растений по группам величины листа производилось по А.И. Колесникову [14], по высоте – по 8 категориям [15].

Для определения устойчивости декоративных качеств древесных видов, произрастающих в зоне корневой системы средневозрастных деревьев первой величины (1–5 м), автором разработана по итогам наблюдений шкала устойчивости:

- 1 – высокоустойчивые (не теряют декоративных качеств);
- 2 – устойчивые (оценка декоративных качеств снижается до средней);
- 3 – слабоустойчивые (цветение слабое, цвет листвы и соцветий теряет яркость, при произрастании на удалении более 5 м от деревьев первой величины отмечается повышение оценки декоративных качеств).

Результаты исследований

В саду непрерывного цветения произрастают 33 вида древесных растений, которые принадлежат 13 семействам. Деревьев – 11 видов, кустарников – 22. Самое богатое семейство – *Rosaceae* Juss. (11 видов), *Oleaceae* Hoffmanns. & Link (5), *Cupressaceae* Bartlett (3), *Hydrangeaceae* Dumort. (3), *Fabaceae* LINDL. (2), *Grossulariaceae* DC (2). По одному виду отнесено к семействам: *Salicaceae* Mirb., *Malvaceae* Dumort., *Sapindaceae* Juss., *Paulowniaceae* Nakai, *Berberidaceae* Juss., *ornaceae* Juss. ex Dumort., *Celastraceae* R.Br.

Более всего видов по происхождению относится к Дальневосточному и Восточноазиатскому регионам (в каждом – по 12). Это в основном декоративные кустарники. Второе место занимают представители Евразии (8), третье – Северной Америки (7). К выходцам Балканского региона и Кавказа отнесено по три вида.

В процессе исследования на территории сада автором была проведена оценка декоративности древесных растений в исследуемых условиях произрастания (в зоне корневой системы средневозрастных деревьев) по 11 показателям. Результаты представлены в табл. 2.

По сумме баллов (табл. 2) выявлено три группы декоративности древесных растений: I – два вида (*Berberis thunbergii*, *Cornus alba*), II – 25, III – 6 видов.

Форма и величина листьев древесных растений играют существенную роль в зрительном восприятии. У мелких листьев даже на близком расстоянии неразличима их форма, у крупных она видна издалека. Величина листа влияет на выразительность кроны древесных растений [14]. Распределение исследуемых древесных растений представлено по 5 группам величины листа [14]. Очень крупных листьев (более 40 см) нет. Крупные листья (20–40 см) – у двух видов (6 %): *Fraxinus excelsior*, *Sorbaria sorbifolia*; средней величины (10–20 см) – у девяти (27 %): *Sorbus aucuparia*, *Robinia pseudoacacia*, *Robinia viscosa*, *Acer platanoides*, *Paulownia tomentosa*, *Hydrangea arborescens*, *Hydrangea paniculata*, *Syringa josikaea*, *Rosa rugose*; мелкие (5–10 см) – у 13 (40 %): *Populus balsamifera*, *Tilia cordata*, *Philadelphus coronarius*, *Kerria japonica*, *Forsythia ovata*, *Forsythia europaea*, *Cornus alba*, *Syringa vulgaris*, *Physocarpus opulifolius*, *Ribes rubrum*, *Ribes sanguineum*, *Prunus cerasus*, *Thuja occidentalis*; очень мелкие листья (1–5 см) – у 9 видов (27 %): *Berberis thunbergii*, *Spiraea japonica*, *Spiraea betulifolia*, *Chaenomeles japonica*, *Dasiphora fruticosa*, *Euonymus verrucosus*, *Cotoneaster lucidus*, *Juniperus sabina*, *Juniperus communis*.

Величина растения определяет его место в садово-парковой композиции. Участок, просматривающийся насквозь, зрительно представляется меньше, чем есть на самом деле. При помощи различной высоты древесных растений создается вертикальный объем сада. На небольшой территории построено несколько различных участков при помощи многорядных композиций из декоративных растений. Благодаря проложенным извилистым тропинкам, огибающим созданные композиции, сформированы маршруты для прогулок с постепенно открывающимися чудесными видами.

На исследуемой территории произведено распределение древесных растений по 3 категориям высоты у деревьев и по 4 – у кустарников [15]. Полученные результаты представлены в табл. 3.

Более всего у деревьев и кустарников богата категория средней высоты – по 46 %. На втором месте – деревья высокие (36 %), а кустарники низкие (36 %). Меньше всего стелющихся форм кустарников (4 %). Многообразие древесных растений по высоте играет большую роль при создании многорядных композиций, которые придают саду вертикальный объем, благодаря которому сад выглядит безграничным, т.е. визуальное его рубежи растворяются в цветущей зелени [16].

Выделена группа красивоцветущих древесных растений – 16 видов (48,5 %). В табл. 4 представлена фенология начала и конца цветения за период 2021–2023 гг. в климатических условиях Среднего Предуралья.

Таблица 2 / Table 2

Оценка декоративности древесных видов растений, баллов
/ Assessment of the decorativeness of woody plant species, points

Видовое название	Критерий декоративности												
	ПД	ЦП	ЦК	ФК	ФЛ	ОЛ	ОО	ПО	ОР	СР	З	Σ	ГД
	Переводной коэффициент, Пк												
	3	1	1	2	2	2	2	3	2	1	1		
<i>Populus balsamifera</i>	6	2	2	6	6	4	4	6	2	5	5	48	III
<i>Tilia cordata</i>	9	3	2	8	6	2	4	6	2	5	5	52	II
<i>Acer platanoides</i>	9	3	2	8	6	2	6	9	2	5	5	59	II
<i>Robinia pseudoacacia</i>	12	5	2	8	6	2	2	–	8	5	5	55	II
<i>Robinia viscosa</i>	9	5	2	2	6	2	2	–	8	5	2	43	III
<i>Sorbus aucuparia</i>	12	4	2	8	6	2	10	9	4	5	5	68	II
<i>Paulownia tomentosa</i>	9	–	4	2	8	4	2	–	8	5	2	44	III
<i>Fraxinus excelsior</i>	6	2	2	4	8	2	4	9	2	5	5	49	III
<i>Prunus cerasus</i>	12	5	3	8	6	2	4	9	4	5	5	63	II
<i>Juniperus communis</i>	15	–	3	8	4	2	2	–	6	5	5	50	II
<i>Thuja occidentalis</i>	15	1	3	8	6	2	2	–	6	5	5	53	II
<i>Sorbaria sorbifolia</i>	12	4	4	4	8	2	6	6	6	5	5	62	II
<i>Cotoneaster lucidus</i>	12	2	2	6	4	4	10	9	6	4	5	64	II
<i>Philadelphus coronarius</i>	9	5	3	8	6	2	4	9	6	5	5	62	II
<i>Kerria japonica</i>	12	4	4	4	6	2	2	–	8	5	4	51	II
<i>Berberis thunbergii</i>	12	3	2	8	4	10	10	12	10	5	5	81	I
<i>Spiraea japonica</i>	9	4	2	6	4	2	6	9	8	5	5	60	II
<i>Spiraea betulifolia</i>	9	4	2	8	4	2	8	12	8	5	5	67	II
<i>Hydrangea arborescens</i>	9	4	3	4	8	2	4	12	6	5	5	62	II
<i>Hydrangea paniculate</i>	12	5	2	4	8	2	6	15	6	5	5	70	II
<i>Chaenomeles japonica</i>	12	5	3	8	6	4	2	–	8	5	4	57	II
<i>Forsythia europaea</i>	9	5	3	8	6	2	4	12	6	5	4	64	II
<i>Forsythia ovata</i>	9	5	3	8	6	2	4	12	8	5	5	67	II
<i>Cornus alba</i>	15	3	4	10	6	8	10	15	10	5	5	91	I
<i>Dasiphora fruticosa</i>	9	3	3	4	4	2	4	9	4	3	5	50	II
<i>Syringa vulgaris</i>	9	5	2	8	8	4	2	–	6	5	5	54	II
<i>Syringa josikaea</i>	9	5	2	8	8	2	10	12	6	5	5	72	II
<i>Euonymus verrucosus</i>	9	3	3	8	4	2	6	9	4	5	5	58	II
<i>Rosa rugosa</i>	12	5	3	4	6	2	4	12	4	4	5	61	II
<i>Physocarpus opulifolius</i>	12	2	2	4	6	10	10	15	8	5	5	79	II
<i>Ribes rubrum</i>	9	5	4	4	6	2	2	–	6	5	5	48	III
<i>Ribes sanguineum</i>	6	–	4	4	6	2	2	–	4	4	2	34	III
<i>Juniperus sabina</i>	15	–	2	10	4	2	2	–	6	5	5	51	II
Средний балл по признаку декоративности	3,5	3,3	2,7	3,2	3,0	1,4	2,4		3,0	4,8	4,7		II

Таблица 3 / Table 3

**Распределение древесных растений по категориям высоты
/ Distribution of studied woody plants by height category**

Категория по высоте	Видовой состав
	Деревья
Высокие (1-я) – более 20 м	<i>Tilia cordata, Populus balsamifera, Fraxinus excelsior, Acer platanoides</i>
Средние (2-я) – 10–20 м	<i>Robinia pseudoacacia, Robinia viscosa, Sorbus aucuparia, Paulownia tomentosa, Thuja occidentalis</i>
Низкие (3-я) – 5–10 м	<i>Prunus cerasus, Juniperus Communis</i>
	Кустарники
Высокие – от 3 м и выше	<i>Syringa vulgaris, Syringa josikaea, Euonymus verrucosus</i>
Средние – 2–3 м	<i>Sorbaria sorbifolia, Cotoneaster lucidus, Philadelphus coronarius, Hydrangea arborescens, Hydrangea paniculate, Forsythia europaea, Forsythia ovata, Cornus alba, Physocarpus opulifolius, Ribes sanguineum</i>
Низкие – 1–2 м	<i>Kerria japonica, Berberis thunbergii, Spiraea japonica, Spiraea betulifolia, Dasiphora fruticosa, Rosa rugosa, Ribes rubrum, Chaenomeles japonica</i>
Ползучие и стелющиеся – до 1 м	<i>Juniperus sabina</i>

Таблица 4 / Table 4

**Фенология цветения красивоцветущих древесных в период 2021–2023 гг.
/ Flowering phenology of beautifully flowering woody in the period 2021-2023**

Видовое название	Год исследования					
	2021		2022		2023	
	Время цветения					
	Начало	Конец	Начало	Конец	Начало	Конец
<i>Robinia pseudoacacia</i>	22.05	07.06	15.06	30.06	20.05	02.06
<i>Robinia viscosa</i>	10.06, 17.08	28.06, 28.09	– 18.08	– 15.10	– 21.08	– 19.10
<i>Sorbaria sorbifolia</i>	10.07	29.07	14.07	01.08	05.07	19.07
<i>Philadelphus coronarius</i>	26.05	19.06	16.06	09.07	23.05	12.06
<i>Kerria japonica</i>	– 20.08	– 28.09	– 17.08	– 15.10	– 15.08	– 19.10
<i>Spiraea japonica</i>	05.07	21.08	15.07	20.08	13.07	18.08
<i>Spiraea betulifolia</i>	10.06	04.07	17.06	10.07	12.06	08.07
<i>Hydrangea arborescens</i>	16.06	13.09	04.07	15.09	29.06	19.09
<i>Hydrangea paniculate</i>	12.07	03.10	23.07	15.10	25.07	09.10
<i>Chaenomeles japonica</i>	16.05	13.06	28.05	25.06	12.05	08.06
<i>Forsythia europaea</i>	05.05	21.05	07.05	30.05	01.05	22.05
<i>Forsythia ovata</i>	26.04	10.05	27.04	14.05	15.04	04.05
<i>Syringa vulgaris</i>	17.05	05.06	25.05	14.06	13.05	03.06
<i>Syringa josikaea</i>	28.05	13.06	10.06	28.06	25.05	14.06
<i>Rosa rugosa</i>	08.06	13.09	17.06	15.09	25.06	19.09
<i>Dasiphora fruticosa</i>	16.06	16.09	02.07	27.09	29.06	03.10

Начало цветения (табл. 4) зависит от погодных условий. Переход среднесуточной температуры на активные (+ 10 °С) в 2021 г. произошел 14 мая. В 2022 г. стабильно + 10 °С отмечается с 27 мая, в 2023 г. – 23 апреля. Тёплый май и июнь способствовали раннему началу цветения в 2021 г. по сравнению с 2022 и 2023 гг. В 2022 г. наблюдалось самое позднее начало цветения. Май и июнь 2022 г. были прохладными. Отклонение от нормы среднемесячной температуры в мае – минус 2,6 °С, в июне – минус 1,3 °С (табл. 1). В 2023 г. даты начала цветения культур отмечены раньше 2022 г. и позже 2021 г. Тёплый апрель в 2023 г. повлиял на более раннее цветение

Forsythia Ovata по сравнению с 2021 и 2022 гг. (табл. 1). Цветение древесных растений в саду происходит с апреля по октябрь (табл. 4).

За 7 лет исследований (2016–2023 гг.) по разработанной автором методике выделены группы устойчивости декоративных качеств древесных растений, произрастающих в зоне корневой системы средневозрастных деревьев первой величины (*Populus balsamifera*, *Tilia cordata*) на исследуемой территории в климатической зоне Среднего Предуралья (табл. 5).

Таблица 5 / Table 5

Группы устойчивости декоративных качеств древесных растений, произрастающих в зоне корневой системы деревьев первой величины на исследуемой территории
/ Groups of stability of decorative qualities of woody plants growing in the zone of the root system of trees of the first magnitude in the study area

Группа устойчивости		
Высокоустойчивая	Устойчивая	Слабоустойчивая
<i>Berberis thunbergii</i>	<i>Hydrangea arborescens</i>	<i>Dasiphora fruticosa</i>
<i>Cornus alba</i>	<i>Hydrangea paniculate</i>	<i>Rosa rugosa</i>
<i>Syringa vulgaris</i>	<i>Chaenomeles japonica</i>	<i>Ribes rubrum</i>
<i>Syringa josikaea</i>	<i>Physocarpus opulifolius</i>	<i>Ribes sanguineum</i>
<i>Spiraea japonica</i>	<i>Forsythia europaea</i>	
<i>Spiraea betulifolia</i>	<i>Robinia pseudoacacia</i>	
<i>Prunus cerasus</i>	<i>Kerria japonica</i>	
<i>Forsythia ovata</i>	<i>Thuja occidentalis</i>	
<i>Sorbaria sorbifolia</i>	<i>Juniperus communis</i>	
<i>Juniperus sabina</i>	<i>Philadelphus coronarius</i>	
<i>Cotoneaster lucidus</i>	<i>Euonymus verrucosus</i>	
	<i>Sorbus aucuparia</i>	

Устойчивость декоративных качеств при произрастании в фитоценозе со средневозрастными деревьями первой величины определялась у декоративных кустарников и деревьев второй и третьей величины (27 видов). Выявлены три группы. Высокоустойчивые – 40 % (11 видов). Произрастают в непосредственной близости (до 5 м) от стволов средневозрастных деревьев первой величины, имеют высокое качество цветения, декоративность листьев и высокий балл состояния растений. Устойчивые – 45 % (12 видов). У них снижается интенсивность цветения, состояние растений оценивается высоким баллом. Слабоустойчивые – 15 % (4 вида) являются светолюбивыми культурами. Произрастая под пологом *Populus balsamifera*, *Tilia cordata*, они испытывают дефицит солнечной радиации, имеют недостаточное влагообеспечение, особенно в засушливый вегетационный период. У данных видов отмечается низкое качество цветения, слабая интенсивность яркости соцветий и листвы. Исследования особенностей произрастания видов *Hydrangea* в окружении средневозрастных деревьев первой величины (*Betula*, *Populus*) показали, что *Hydrangea paniculate* теряет декоративные свойства, произрастая ближе 5 м от стволов этих деревьев [17].

На данной территории произрастают редкие интродуценты со слабой морозостойкостью (*Robinia viscosa*, *Kerria japonica*, *Paulownia tomentosa*). Они зачастую обмерзают до корневой шейки, но дают новые побеги, некоторые (*Robinia viscosa*, *Kerria japonica*) даже цветут в конце летнего периода до заморозков (август, сентябрь). *Paulownia tomentosa* считается очень редким интродуцентом в Среднем Предуралье, но отрастающие вновь побеги с крупными листьями привлекают внимание прогуливающих по тропинкам сада.

Заключение

В саду произрастают 33 вида древесных растений, которые принадлежат 13 семействам. Деревьев – 11 видов, кустарников – 22. В основном это декоративные древесные растения (2-я группа) – 25 видов. К 3-й группе менее декоративных растений отнесено 6 видов. В 1-ю группу высокодекоративных древесных растений вошло всего два вида (*Berberis thunbergii*, *Cornus alba*).

На исследуемой территории отмечены разнообразные группы древесных растений по величине листа: крупные листья – 6 %, средние – 27, мелкие – 39,39, очень мелкие – 27 %.

В составе исследуемых древесных растений присутствуют 3 категории по высоте у деревьев и 4 категории у кустарников.

Выделена группа красивоцветущих древесных растений – 16 видов (48,5 %). По полученным данным фенологии цветения можно отметить, что начало цветения зависит от перехода среднесуточной температуры на активные (+ 10 °С) и погодных условий апреля, мая и июня.

В процессе исследований в период 2016–2023 гг. по разработанной автором методике выделены 3 группы устойчивости декоративных качеств древесных растений, произрастающих в зоне корневой системы средневозрастных деревьев первой величины (*Populus balsamifera*, *Tilia cordata*): высокоустойчивые – 40 % (11 видов); устойчивые – 45 % (12 видов); слабоустойчивые – 15 % (4 вида).

Редкие декоративные интродуценты повышают привлекательность сада.

Представленные результаты исследований биологических и декоративных особенностей древесных растений, произрастающих в корневой зоне средневозрастных деревьев первой величины, могут быть полезны для специалистов зеленого строительства, в любительском садоводстве, для создания ландшафтных групп в садах и парках в зоне Среднего Предуралья.

Список источников

1. Сунцова Л.Н., Иншаков Е.М. Фитоценология : учеб. пособие. Красноярск: СибГУ им. М.Ф. Решетнева, 2019. 118 с.
2. Бектаева А.Э. Цветотерапия: психология цвета // Проблемы современной науки и образования. 2020. № 2(147). С. 84–92.
3. Терешкин А.В., Филатов В.Н. Мониторинг состояния кустарников в зеленых насаждениях г. Саратова // Соц.-экол. технологии. 2016. № 3. С. 55–62.
4. Заигралова Г.Н., Терешкин А.В., Азарова О.В., Калмыкова А.Л., Корниенко М.Ю. Оценка породного состава кустарников на объектах озеленения г. Саратова // Аграр. науч. журн. 2017. № 6. С. 11–15.
5. Калмыкова А.Л., Заигралова Г.Н., Азарова О.В., Мнекина И.А., Агапова А.Е., Храмченко А.В. Оценка декоративности древесных кустарников, используемых в озеленении г. Саратова // Новые технологии. 2018. № 1. С. 139–146.
6. Семенютина А.В., Костюков С.М. Адаптация кустарников и перспективы их применения в рекреационно-озеленительных насаждениях засушливой зоны // Вестн. ИрГСХА. 2011. № 44, ч. 1. С. 122–130.
7. Влияние таксационных показателей насаждений липы. URL: <http://vunivere.ru/work20467> (дата обращения: 24.09.2023).
8. Стурман В.И., Малькова И.Л., Загребина Т.А. Климат города. Основные параметры // Воздушный бассейн Ижевска / под ред. В.И. Стурмана. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002. С. 16–23.
9. Архив погоды в Ижевске. Данные метеостанции (2021–2023 гг.) Ижевск, Россия, (WMO ID)=28411. URL: http://gr5.ru/Архив_погоды_в_Ижевске (дата обращения: 15.09.2023).
10. Кузьмина Н.М., Федоров А.В. Мониторинг устойчивости декоративных травянистых многолетников в коллекции «сада непрерывного цветения» отдела интродукции и акклиматизации растений УдмФИЦ УрО РАН, г. Ижевск // Астраханский вестн. экол. образования. 2018. № 3(45). С. 50–155.
11. Кузьмина Н.М. Ландшафтно-декоративный принцип построения «сада непрерывного цветения» отдела интродукции и акклиматизации растений УдмФИЦ УрО РАН, г. Ижевск // Наследие академика Н.В. Цицина. Современное состояние и перспективы развития : сб. ст. Всерос. науч. конф. с междунар. участием, посвященной 120-летию Н.В. Цицина. М.: ГБС РАН, 2019. С. 201–203.
12. Рязанова Н.А., Путенихин В.П. Оценка декоративности кленов в Уфимском ботаническом саду // Вестн. ИрГСХА. 2011. Т. 44, № 4. С. 121–128.
13. Бебия С.М., Джакония Е.Ф., Титов И.Ю. Методика комплексной оценки декоративности и экологической устойчивости древесных растений на Черноморском побережье Кавказа // Учен. зап. Крымского фед. ун-та им. В.И. Вернадского. Биология. Химия. 2018. Т. 4 (70), № 3. С. 35–50.
14. Колесников А.И. Декоративная дендрология. М.: Лесная промышленность, 1974. 704 с.
15. Луганская С.Н. Биоэкологические и декоративные свойства деревьев и кустарников: метод. указания для обучающихся очной и заочной форм обучения специальностей 35.03.10 «Ландшафтная архитектура» и 35.03.05 «Садоводство». Екатеринбург, 2019. 57 с. URL: <http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/8712> (дата обращения: 23.08.2023).
16. Кустарники решают важные задачи по формированию ландшафта. URL: <http://blog.braerstroy.ru/blog/rol-kustarnikov...> (дата обращения: 05.08.2023).
17. Кузьмина Н.М., Федоров А.В., Николаев Н.В. Особенности фенологии и перспективность интродукции представителей рода *Hydrangea* в условиях Среднего Предуралья // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2022. № 4-2. С. 108–117. Doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-2-108-117.

References

1. Suntsova L.N., Inshakov E. M. *Phytocenology*. Textbook manual. Krasnoyarsk: Reshetnev Siberian State University Press; 2019. 118 p. (In Russ.).
2. Bektaeva A.E. Color therapy: psychology of color. *Problemy sovremennoi nauki i obrazovaniya = Problems of Modern Science and Education*. 2020;(2):84-92. (In Russ.).
3. Tereshkin A.V., Filatov V.N. Monitoring the condition of shrubs in green spaces in Saratov. *Sots.-ekol. tekhnologii = Social and Environmental Technologies*. 2016;(3):55-62. (In Russ.).
4. Zaigralova G.N., Tereshkin A.V., Azarova O.V., Kalmykova A.L., Kornienko M.Yu. Assessment of the species composition of shrubs at landscaping sites in Saratov. *Agrar. nauch. zhurn. = Agrarian Scientific Journal*. 2017;(6):11-15. (In Russ.).
5. Kalmykova A.L., Zaigralova G.N., Azarova O.V., Mnekina I.A., Agapova A.E., Khramchenko A.V. Assessment of the decorative properties of woody shrubs used in landscaping in Saratov. *Novye tekhnologii = New Technologies*. 2018;(1):139-146. (In Russ.).
6. Semenyutina A.V., Kostyukov S.M. Adaptation of shrubs and prospects for their use in recreational and landscaping plantings of the arid zone. *Vestn. IrGSKhA = Bulletin of the Irkutsk State Agricultural Academy*. 2011;(44-1):122-130. (In Russ.).
7. *The influence of taxation indicators of linden plantings*. Available from: <http://vunivere.ru/work20467> [Accessed 24th September 2023]. (In Russ.).
8. Sturman V.I., Malkova I.L., Zagrebina T.A. City climate. Basic parameters. *Air basin of Izhevsk*. Ed. by V.I. Sturman. Moscow, Izhevsk: Institute of Computer Research Press; 2002:16-23. (In Russ.).
9. *Weather archive in Izhevsk*. Weather station data (2021-2023) Izhevsk, Russia, (WMO ID)=28411. Available from: http://rp5.ru/Weather_archive_in_Izhevsk [Accessed 15th September 2023]. (In Russ.).
10. Kuzmina N.M., Fedorov A.V. Monitoring the sustainability of ornamental herbaceous perennials in the collection of the “Garden of Continuous Flowering” of the Department of Plant Introduction and Acclimatization of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk. *Astrakhanskii vestn. ekol. obrazovaniya = Astrakhan Bulletin of Environmental Education*. 2018;(3):50-155. (In Russ.).
11. Kuzmina N.M. Landscape and decorative principle of constructing a “Garden of continuous flowering” of the Department of Plant Introduction and Acclimatization of the Federal Research Center of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Izhevsk. *The legacy of academician N.V. Tsitsina. Current state and development prospects*. Collection of articles of the All-Russian scientific conference with international participation, dedicated to the 120th anniversary of N.V. Tsitsina. Moscow: Tsitsin Main Botanical Garden of the Russian Academy of Sciences Press; 2019:201-203. (In Russ.).
12. Ryazanova N.A., Putenikhin V.P. Assessment of the decorative properties of maples in the Ufa Botanical Garden. *Vestn. IrGSKhA = Bulletin of the Irkutsk State Agrarian University*. 2011;44(4):121-128. (In Russ.).
13. Bebiya S. M., Dzhakonia E. F., Titov I. Yu. Methodology for a comprehensive assessment of the decorativeness and environmental sustainability of woody plants on the Black Sea coast of the Caucasus. *Uchen. zap. Krymskogo fed. un-ta im. V.I. Vernadskogo. Biologiya. Khimiya = Scientific Notes of the Vernadsky Crimean Federal University. Biology. Chemistry*. 2018;4(3):35-50. (In Russ.).
14. Kolesnikov A.I. *Decorative dendrology*. Moscow: Lesnaya promyshlennost' Publ.; 1974. 704 p. (In Russ.).
15. Luganskaya S.N. *Bioecological and decorative properties of trees and shrubs. Guidelines for full-time and part-time students of the specialties 03/35/10 “Landscape Architecture” and 03/35/05 “Gardening”*. Yekaterinburg, 2019. 57 p. Available from: <http://elar.usfeu.ru/handle/123456789/8712> [Accessed 23rd August 2023]. (In Russ.).
16. *Shrubs solve important tasks in shaping the landscape*. Available from: <http://blog.braerstroy.ru/blog/rol-kustarnikov...> [Accessed 5th August 2023]. (In Russ.).
17. Kuzmina N.M., Fedorov A.V., Nikolaev N.V. Features of phenology and prospects for the introduction of representatives of the genus *Hydrangea* in the conditions of the Middle Urals. *Izv. vuzov. Sev-Kavk. region. Estestv. nauki = Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus region. Natural Science*. 2022;(4-2):108-117. Doi: 10.18522/1026-2237-2022-4-2-108-117. (In Russ.).

Информация об авторе

Н.М. Кузьмина – старший научный сотрудник, отдел интродукции и акклиматизации растений.

Information about the author

N.M. Kuzmina – Senior Researcher, Department of Plant Introduction and Acclimatization.

Статья поступила в редакцию 02.04.2024; одобрена после рецензирования 10.07.2024; принята к публикации 16.10.2024.
The article was submitted 02.04.2024; approved after reviewing 10.07.2024; accepted for publication 16.10.2024.

ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ TOUCHES TO THE PORTRAIT

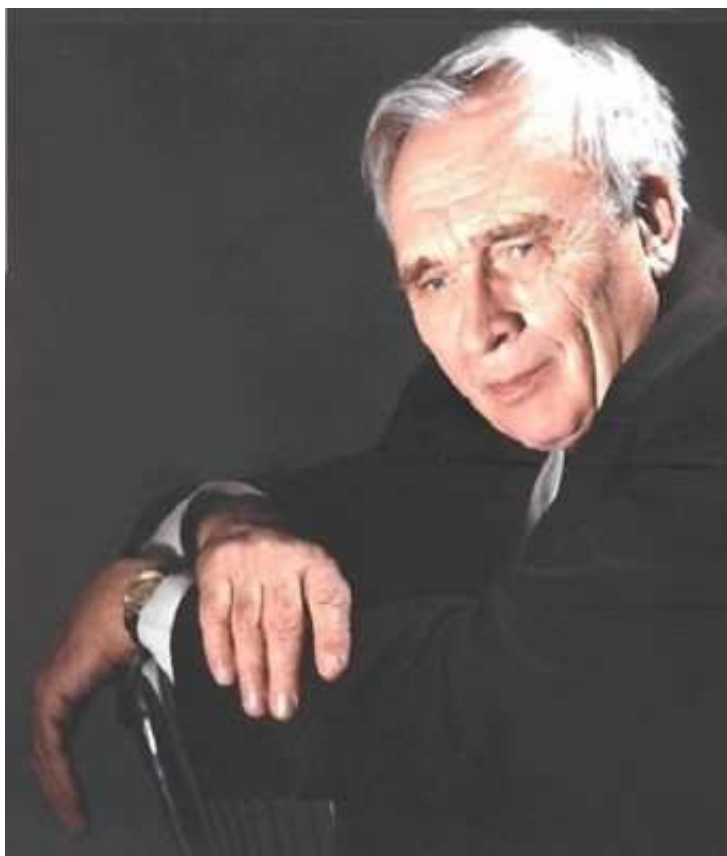
Персоналии

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-134-136

ЮРИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ УСТИНОВ (1934–2023)

Personalities

YURI ANATOLYEVICH USTINOV (1934–2023)



14 ноября 2024 г. исполнилось 90 лет со дня рождения крупного советского и российский механика, заслуженного деятеля науки РФ, доктора физико-математических наук профессора Юрия Анатольевича Устинова.

В 1952 г. Юрий Анатольевич после окончания школы поступил на отделение механики физико-математического факультета Ростовского госуниверситета (РГУ). В 1957 г. он окончил университет и начал работать ассистентом кафедры теоретической механики. Его первые работы, выполненные под руководством И.И. Воровича, посвящены решению контактной задачи о взаимодействии жесткого штампа с упругим слоем конечной толщины на основе асимптотического подхода. Эти исследования заложили основы нового в то время научного направления – смешанные задачи теории упругости для полуграниченных тел.

В начале 60-х гг. XX в. после разделения кафедры теоретической механики на факультете была создана кафедра теории упругости. Юрий Анатольевич стал одним из первых ее аспирантов. Во время обуче-

ния в аспирантуре он разработал новый оригинальный асимптотический метод, позволивший изучить особенности напряженно-деформированного состояния в многосвязных телах со сближенными границами. Эти результаты составили основу его кандидатской диссертации «Некоторые задачи теории упругости для двухсвязных областей с круговыми границами и их приложение» (1964 г.), выполненной под руководством И.И. Воровича.

Для научных исследований Юрия Анатольевича характерно сочетание глубоких фундаментальных исследований, основанных на спектральной теории операторов и функциональном анализе, с решением важных прикладных задач. Он внес существенный вклад в разработку методов расчета прочности

и устойчивости горячей посадки бандажей на центры зубчатых колес прокатных станков и шахтных подъемников. По результатам этих исследований в соавторстве с И.И. Воровичем и Ю.В. Сафроновым была написана и опубликована первая на кафедре теории упругости монография «Расчет колес сложной конструкции» (М.: Машиностроение, 1967).

Дальнейшие научные интересы Юрия Анатольевича связаны с проблемой предельного перехода от трехмерных задач теории упругости к двумерным. Им была построена математически строгая теория толстых поперечно-неоднородных плит (в том числе и сэндвичевой структуры), которая включает в себя разделение полей (вихревое, потенциальное, бигармоническое), методы построения неоднородных (позволяющих снять нагрузку с лицевых поверхностей плиты и свести задачу к однородной) и однородных решений. Им были развиты методы асимптотического анализа краевых задач, содержащих два малых параметра – геометрический и жесткостной, реализованы эффективные схемы расчета трехмерных задач для неоднородных плит и дано строгое математическое обоснование их сходимости. На основе построенной математической теории были проанализированы области применимости различных известных прикладных теорий и построены новые уточненные теории, в частности проведен анализ трехмерного напряженного состояния трехслойной плиты в окрестности локальной нагрузки.

Результаты исследований в области поперечно-неоднородных плит составили основу его докторской диссертации «Граничные задачи и проблема предельного перехода от трехмерных задач к двумерным для неоднородных плит», защищенной в 1977 г. в Институте проблем механики АН СССР. В 2006 г. результаты этих исследований были опубликованы в монографии «Математическая теория поперечно-неоднородных плит».

Тяга к исследованию новых научных проблем привела Ю.А. Устинова в 70-е гг. XX в. к изучению новых классов задач, находящихся на стыке механики твердого деформируемого тела и физики сегнетоэлектриков. Он одним из первых на основе трехмерных уравнений начал разрабатывать математическую теорию и методы расчета напряженного состояния статических и динамических задач электроупругости, в том числе электроупругих плит и пластин, которые были применены далее для расчета реальных датчиков и устройств адаптивной оптики.

Ю.А. Устинов с учениками получили ряд фундаментальных результатов при изучении распространения волн в неоднородных структурах. Для твердых волноводов и слоистых плит из упругих и электроупругих материалов дано полное математическое описание структуры решений в окрестности толщинных резонансов. Часть полученных результатов опубликована в монографии «Математическая теория нерегулярных твердых волноводов» (1993 г.), написанной совместно с его учеником И.П. Гетманом.

В 90-е гг. он начинает исследования, связанные с классическими задачами Сен-Венана для таких конструктивных элементов, как естественно закрученный стержень, цилиндрическая пружина, цилиндр с винтовой анизотропией. На основе анализа спектральных пучков разработан новый метод, в результате использования которого решение сложных трехмерных задач сведено к двумерным, дана их вариационная постановка. Эти исследования нашли свое отражение в монографии «Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров» (2003 г.).

Широта научных интересов, жажда к исследованиям в новых областях знания, богатейший опыт в решении различных практических задач позволили ему обратиться к решению некоторых задач биомеханики сосудистой системы. Он активно принимал участие в научных мероприятиях и семинарах по биомеханике, совместно с коллегами разработал математическую модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах. Лекция на эту тему была прочитана им на одной из всероссийских школ «Математическое моделирование и биомеханика в современном университете» и с благодарностью используется при чтении курсов биомеханики многими преподавателями.

Имя Ю.А. Устинова широко известно не только во многих университетских центрах России (Москва, Санкт-Петербург, Саратов, Казань, Краснодар), где ему часто приходилось оппонировать при защите кандидатских и докторских диссертаций, но и в странах ближнего и дальнего зарубежья (Украина, Армения, Азербайджан). В 2003 г. он руководил грантом Лондонского математического общества совместно с учеными, работающими в Манчестерском университете. Разработанные Ю.А. Устиновым подходы к аналитическому и численному исследованию равновесия и устойчивости нелинейно-упругих оболочек сложной геометрической формы позволили выполнить работу по оптимизации формы гофрированных мембран для крупной компании Германии, специализирующейся на производстве датчиков различного назначения.

Юрий Анатольевич является создателем и научным руководителем научного направления «математическая теория и методы расчета конструкций из материалов со сложными физико-механическими свойствами». Он подготовил 17 кандидатов и был научным консультантом по 4 докторским диссертациям. Среди его учеников – академик НАН Азербайджана М.Ф. Мехтиев, заведующий научным отделом фирмы Endress+Hauser (Германия) доктор физ.-мат. наук И.П. Гетман.

Ю.А. Устинов – обладатель звания заслуженного деятеля науки РФ, член Российского национального комитета по теоретической и прикладной механике.

Юрий Анатольевич проработал в системе высшей школы более 60 лет, из них большую часть – в РГУ (ЮФУ), внес огромный вклад в подготовку новых поколений ученых-механиков. За время его педагогической деятельности им был разработан ряд основных и оригинальных спецкурсов: «Теоретическая механика», «Теория оболочек», «Теория толстых плит», «Плоские и пространственные задачи теории упругости», «Электроупругость», «Приложения функционального анализа в задачах МСС». Одним из первых сотрудников механико-математического факультета РГУ Юрий Анатольевич был удостоен звания Соросовского профессора по математике.

Ю.А. Устинов – крупный организатор научного, учебного процесса в системе высшего образования на Юге России. Свидетельство этого – работа деканом механико-математического факультета РГУ (1978–1979 гг.) и ректором Ростовского института сельскохозяйственного машиностроения (ныне – Донской государственной технической университет) в 1983–1987 гг.

На протяжении многих лет Юрий Анатольевич принимал активное участие в подготовке и аттестации кадров высшей квалификации, читал лекции для аспирантов, много лет являлся председателем диссертационных советов по механике деформируемого твердого тела в РГУ и ЮФУ.

Юрий Анатольевич оставил светлую память о себе. Это был настоящий ученый со спортивным характером. В молодости он занимался легкой атлетикой, играл в баскетбол. Многие годы принимал участие в работе секции настольного тенниса на мехмате.

Большие заслуги Ю.А. Устинова в развитии образования и подготовке кадров отмечены орденами Дружбы и «Знак Почета».

Ученики и коллеги с теплотой вспоминают научные и человеческие контакты с Юрием Анатольевичем на кафедре, многочисленных конференциях и съездах.

С.М. Бауэр, Н.В. Боев, А.О. Ватульян, М.И. Карякин

Персоналии

doi: 10.18522/1026-2237-2024-4-1-137-141

К 90-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ В.И. ЮДОВИЧА. ЭПИЗОДЫ О НАУЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Personalities

TO THE 90th ANNIVERSARY OF THE BIRTH OF V.I. YUDOVICH. EPISODES ABOUT SCIENTIFIC ACTIVITIES

4 октября 2024 г. исполнилось 90 лет со дня рождения ученого мирового уровня, российского математика и механика, создателя Ростовской научной школы по математической гидродинамике, заслуженного деятеля науки РФ Виктора Иосифовича Юдовича (04.10.1934 – 19.04.2006). Его имя носит малая планета Yudovich (такой чести были удостоены ещё два выдающихся ученых нашего университета – И.И. Ворович и Г.В. Войткевич).

Достаточно полные очерки о биографии В.И. Юдовича неоднократно публиковались в различных источниках. настоящая статья – это некоторые штрихи к портрету, основанные на личных воспоминаниях об общении с В.И. Юдовичем в качестве ученика, а затем и младшего коллеги.

Научная жизнь В.И. Юдовича связана с Ростовским государственным университетом (РГУ, ныне – ЮФУ), куда он поступил на физмат в 1952 г. и где через пять лет стал преподавать. Путь от ассистента до профессора был пройден за 15 лет, защищенные в Москве кандидатская (МГУ) и докторская (ИПМ РАН) диссертации признаны выдающимися. В 1972 г. была основана кафедра вычислительной математики (ныне – кафедра вычислительной математики и математической физики), заведующим которой с момента основания до последних дней жизни был В.И. Юдович. Начиная с 2006 г. заведующим кафедрой являюсь я, профессор М.Ю. Жуков.



Электрофорез

В 70-е гг. XX в. по инициативе академиков Г.И. Петрова и Г.Г. Черного в Подмоскowie проводились школы по нелинейным задачам гидродинамической теории устойчивости (НеЗаТеГиУс), организованные Институтом механики МГУ.

В 1976 г. на одной из школ НеЗаТеГиУс киевский математик В.Г. Бабский (заведующий математическим отделом в Институте молекулярной биологии, АН УССР, г. Киев), прогуливаясь зимним вечером с В.И. Юдовичем, заговорил о биологии. В.Г. Бабский рассказал об одном интересном перспективном направлении биологических технологий – электрофорезе, методе разделения химически и биологически активных многокомпонентных смесей на индивидуальные компоненты под действием внешнего электрического поля. В основе разделения смеси лежит тот факт, что отдельные компоненты

обладают различными физико-химическими свойствами, в частности скоростью перемещения на единицу напряженности электрического поля. Задача, о которой шла речь, решалась методами механики сплошной среды. Необходимо было построить математическую модель процесса электрофореза с учетом различных факторов, мешающих разделению, в частности процессов гравитационной конвекции. По словам В.Г. Бабского, модели процесса, за исключением крайне примитивных моделей диффузии с переносом, не учитывающих ни химии процесса, ни тем более конвекции, попросту отсутствовали. С его точки зрения, один из эффективных методов противодействия конвективному перемешиванию смеси – проведение процесса электрофореза в невесомости. Обсудив тематику, собеседники пришли к соглашению о возможности заключения договора о содружестве (формально ни к чему не обязывающего), одним из пунктов которого было написание монографии по электрофорезу.

В.И. Юдович заинтересовался этой проблемой. По возвращении он организовал на кафедре микро-семинар на тему электрофореза, пересказал разговор с В.Г. Бабским и прочел несколько двухчасовых лекций сотрудникам кафедры. Это были лекции по моделям течения многокомпонентных смесей с учетом электрических явлений. В своих лекциях В.И. Юдович хотел заинтересовать сотрудников перспективностью тематики, указать круг задач, возникающих при описании многокомпонентных смесей, особенно их гидродинамической устойчивости (задачами устойчивости в той или иной мере занималось большинство сотрудников кафедры). Лекции читались крайне интенсивно, фактически ежедневно. Сотрудникам кафедры было предложено обдумать в течение недели изложенный материал и высказать свое отношение к тематике, сделать доклады на семинаре.

Наибольшую заинтересованность к тематике проявил я (скорее всего, в силу своего начального физического образования), сделав несколько докладов по неравновесной термодинамике. Подготовка к этим лекциям осуществлялась в тесном контакте с В.И. Юдовичем. Некоторые участники семинара также проявили интерес к задачам, связанным с электрофорезом, и сформировалась группа сотрудников (С.Ф. Мазявкин, Л.И. Сазонов, Ю.С. Барковский, С.Н. Овчинникова), непосредственно занимающихся этой тематикой. Как и предполагалось в разговоре В.Г. Бабского и В.И. Юдовича, был заключен договор кафедры о содружестве с Институтом молекулярной биологии.

Работа над проблемами электрофореза продолжалась скорее на общественных началах. Но к концу 1976 г. с Институтом молекулярной биологии удалось заключить хоздоговор (на 1977–1979 гг.). Руководителем хоздоговора В.И. Юдович предложил назначить меня. Это было достаточно неожиданно – моя научная тематика была связана с теорией упругости. Но Виктор Иосифович понимал, что увлечение задачами электрофореза для него самого является в какой-то мере временным и он не будет уделять ему много времени. Его основное время по-прежнему было занято задачами математической гидродинамики – теорией бифуркаций, турбулентностью, спектральными свойствами теории операторов, устойчивостью течений жидкости, стохастичностью движения в некоторых гидродинамических системах и т. п.

Выбор руководителя хоздоговора по тематике электрофореза не в последнюю очередь был обусловлен четким пониманием, что сочетание физического образования с проявленной увлеченностью новой тематикой делает меня наиболее подходящей кандидатурой. Время подтвердило правильность выбора В.И. Юдовича – процессы переноса в химически активных средах под действием электрического поля и, как позже выяснилось, тесно связанные с ними гиперболические квазилинейные уравнения стали основными в моих научных работах. По этой тематике была защищена докторская диссертация.

В 1977 г. началась наша совместная работа над задачами электрофореза, результатом которой, естественно, стал отчет по хоздоговору, а затем ряд статей, участие во всевозможных конференциях по гидродинамике и непосредственно по электрофорезу. Благодаря энтузиазму В.Г. Бабского удалось создать в стране группу людей из Москвы, Риги, Киева, Харькова, Ленинграда, Перми, Новосибирска, Симферополя, работающих над проблемами электрофореза. Для них проводились конференции и школы-семинары, в основном на базе Института молекулярной биологии.

В процессе работы над проблемами электрофореза В.И. Юдовичем и мною были сконструированы наиболее общие уравнения электрофореза на основе неравновесной термодинамики, введено понятие о локальном химическом равновесии (почти мгновенности химических реакций), сформулирована концепция бесконечно-компонентных смесей (замена целочисленных индексов континуальным параметром), решены некоторые важные задачи теории квазилинейных гиперболических уравнений. Было выяснено, что популярное деление методов электрофореза на зональный, изоэлектрическое фокусирование и изотахофорез не более чем миф. С математической точки зрения общие уравнения описывают

все указанные методы единым образом. Видимое различие объясняется лишь разницей в порядках параметров процесса.

К середине 1982 г. оказалось, что почти все пункты договора о содружестве выполнены, кроме написания монографии. В.Г. Бабскому удалось включить ненаписанную монографию в план издательства «Наукова думка» (Киев) на 1983 г. (сдача рукописи объемом 200 с. планировалась до конца 1982 г.). Авторы (Бабский, Жуков, Юдович) срочно приступили к написанию текста. Несмотря на большой задел в виде ранее опубликованных статей, требовалось дописать примерно 160 с. ранее неопубликованных результатов. Ситуация осложнялась еще и тем, что авторы были физически разделены расстоянием более 1000 км (Жуков, Юдович – Ростов-на-Дону, Бабский – Киев). В 1982 г. в стране не было Интернета, нормальных текстовых редакторов типа Word, LaTeX и прочего. Фактически начало работы пришлось на сентябрь, и ни о каких-либо длительных командировках не могло быть и речи в связи с учебным процессом в университете. Об общей структуре книги договорились по телефону. Работа над текстом монографии протекала на кухне в квартире В.И. Юдовича (на кафедре не было возможности – её площадь примерно 12 м², тут же коллеги, занятые в учебном процессе). Работа над рукописью начиналась практически ежедневно около 19–20 ч и продолжалась до 22–23 ч. Ограничение времени работы было обусловлено учебным процессом и расписанием движения поездов на Киев и из Киева. Написанные части текста от ростовской половины авторов передавались киевской и наоборот при помощи проводников поездов. Использование обычной почты задерживало бы передачу информации на три-четыре дня. Такой интенсивный режим позволил закончить черновую работу над текстом монографии к середине ноября. Еще пара-тройка недель ушла на окончательную подготовку рукописи, которую передали в редакцию «Науковой думки» в начале декабря 1982 г. Монография вышла в 1983 г., а в 1989 г. была издана на английском языке в издательстве Plenum Press. К сожалению, ввиду ограниченности объема в книгу не были включены задачи, связанные с конвективным перемешиванием жидкости.

Помимо работы над монографией, В.И. Юдович занимался и другими задачами, связанными, в частности, со спектральными свойствами дифференциальных операторов. Приведённый эпизод очередной раз подчеркивает его способность увлекаться новыми проблемами, не отвлекаясь от задач, которыми он занимался раньше, умение организовать работу и находить сотрудников, которые могли бы сосредоточиться на новой задаче.

Hong Kong University of Science and Technology (HKUST)

В течение нескольких месяцев в 1995–1996 гг. В.И. Юдович читал цикл лекций в HKUST, куда он был приглашен В.А. Владимировым, директором лаборатории Fluid Dynamics HKUST. Помимо подготовки к чтению лекций, В.И. Юдович интенсивно занимался работой над задачами теории косимметрии, недавно созданной им. Новая теория позволяла описывать поведение динамических систем при некоторых вырождениях, которые отличаются от обычных случаев, когда причиной вырождения служит симметрия операторных уравнений. Кроме этого, он заинтересовался экспериментом, показанным ему В.А. Владимировым, в котором при течении вязкой жидкости в зазоре между двумя цилиндрами, ограниченном твердыми крышками (толщина зазора в осевом направлении много меньше его ширины в радиальном), при вращении внутреннего цилиндра возникали струйные течения. В зависимости от величины скорости вращения внутреннего цилиндра в области, заполненной жидкостью, могли возникать радиальные струи (3–6), медленно прецессирующие в азимутальном направлении. Из общих соображений было понятно, что происходят бифуркации основного режима течения жидкости, подобные тем, которые наблюдаются в течении Тейлора – Куэтта в случае цилиндров, неограниченных в осевом направлении (бесконечных). Между тем в течениях Тейлора – Куэтта возникновение струй не наблюдалось. Они образуются, скорее всего, ввиду ограниченности и тонкости зазора в осевом направлении.

Загруженность В.И. Юдовича и В.А. Владимирова обусловила привлечение к решению новой задачи о возникновении струй дополнительных сотрудников.

В.А. Владимиров сумел пригласить в HKUST меня и П.В. Денисенко (молодой экспериментатор из Новосибирска) для работы в лаборатории Fluid Dynamics непосредственно над задачей о возникновении струйных течений. Если при оформлении П.В. Денисенко особых проблем не возникло – в лаборатории Fluid Dynamics имелась свободная позиция, то для меня они были – финансировалась только зарплата, но не проживание. Дело в том, что аренда квартиры в Гонконге крайне высока. Проблему удалось решить В.И. Юдовичу, разделившему со мной квартиру, которую ему бесплатно выделил HKUST.

Несмотря на то что общий подход к решению задачи о возникновении струй был достаточно ясен – это задача о бифуркации основного режима течения жидкости, проблема осложнялась отсутствием аналитического решения для основного режима течения, что не позволяло эффективно использовать известные подходы (в частности, численное решение) для исследования бифуркаций.

Для решения проблемы В.И. Юдович предложил строить некоторые асимптотические решения, основанные на различиях по порядку параметров задачи (толщина зазоров в осевом и радиальных направлениях). За достаточно короткое время ему удалось построить асимптотическую модель, которая хорошо описывала основной режим течения (это потом подтвердили эксперименты П.В. Денисенко). Асимптотическая модель была достаточно сложной и требовала численного решения. Исследования модели, проведенные нами, позволили убедиться в том, что уравнения имеют треугольную структуру. Они расщепляются на основное уравнение для определения азимутальной скорости течения и на зависимые от азимутальной скорости уравнения для определения радиальной и осевой компонент. Более того, уравнение для азимутальной скорости было решено В.И. Юдовичем аналитически (!) методами теории функций комплексных переменных (ему потребовался для этого всего один день!). Через некоторое время и для уравнений, описывающих радиальную и осевые скорости, я построил аналитическое решение в виде рядов по собственным функциям некоторого бигармонического уравнения. Существенную помощь в построении такого решения сыграла совместная работа Ю.А. Устинова и В.И. Юдовича (1974). Оказалось, что в зазоре образуется вихревое течение, подобное течению Тейлора – Куэтта. Материалы совместного сотрудничества соавторов были позже опубликованы в ряде работ. Результаты экспериментов нашли отражение в части PhD диссертации П.В. Денисенко, выполненной под руководством В.А. Владимирова. К сожалению, построенная асимптотическая модель не содержала азимутальной координаты, что делало невозможным ее использование для построения ответвившихся от основного режима прецессирующих азимутальных течений в задаче о возникновении струй.

Заметим, что применение асимптотического решения в полной неасимптотической задаче было также невозможно – нельзя было линеаризовать исходную задачу на приближенном решении и использовать известную технику построения вторичных режимов течения. Дальнейшая работа над задачей сильно затормозилась ввиду чисто технических трудностей, связанных с реализацией численных алгоритмов (в частности, из-за отсутствия в то время мощных компьютеров в НКУСТ).

Помимо задачи о возникновении струй, у В.И. Юдовича и В.А. Владимирова возникли идеи по теории жидких кристаллов, задачами которой весьма успешно на техническом (прикладном) уровне занимались на некоторых факультетах НКУСТ. Как и в случае электрофореза, В.И. Юдович предложил эти задачи мне. Непосредственно теорией жидких кристаллов В.И. Юдович увлекался лишь на начальных этапах работы, в дальнейшем ограничиваясь только обсуждением проблем – сказывалась его загруженность основной работой в университете и интенсивным исследованием теории косимметрии. Особых успехов в теории жидких кристаллов достичь не удалось. Одна из причин – громадный поток работ в области их технического применения (дисплеи, индикаторы и пр.). Теория мало кого интересовала. Считалось, что классических теоретических работ Лесли, Чандрасекара, де Жена и их учеников вполне достаточно, и опубликовать какие-либо работы по теории было крайне затруднительно. Достаточно большой объем работы по некоторым теоретическим проблемам (вывод общих нестационарных уравнений, задачи конвекции в жидких кристаллах, влияние вибрации на течение жидких кристаллов), выполненный мной и В.А. Владимировым, так и остался в виде рукописей. Немаловажную роль сыграло и окончание срока контракта В.А. Владимирова в НКУСТ, который получил в 1999 году позицию на математическом факультете University of Hull, UK.

Hull Institute for Mathematical Sciences and Applications (HIMSA)

Получив позицию в Университете Халла (Англия), В.А. Владимиров, благодаря своим организаторским способностям, сумел создать в университете HIMSA, директором стал он, а научным руководителем института был утвержден В.И. Юдович. В.А. Владимиров также сумел добиться позиции в лаборатории Fluid Dynamics – структуре HIMSA для П.В. Денисенко. Всё это позволило продолжить работы, начатые в Гонконге.

В.И. Юдович и я проводили в HIMSA по несколько месяцев в 2000–2005 гг. В.И. Юдович читал лекции сотрудникам университета по косимметрии и по теории вибродинамики, которую он начал развивать примерно с 2002 г. Я читал лекции по неравновесной термодинамике и продолжал заниматься задачами теории жидких кристаллов и задачей о возникновении струйных течений во вращающейся жидкости.

Когда наши посещения HIMSA совпадали, мы проживали вместе. Это позволяло по вечерам после работы непосредственно в университете обсуждать некоторые задачи теории жидких кристаллов, задачу о возникновении струй и другие. Обсуждения не носили конкретного характера – это не была совместная работа с написанием текстов, формул и пр. Скорее разговор шел о возможных направлениях, о привлечении сотрудников кафедры вычислительной математики и математической физики РГУ к работе в HIMSA, обсуждались и иные темы.

В HIMSA проводился еженедельный семинар, докладчиками были, в частности, специально приглашенные А.И. Шнирельман, Г.Е. Фалькович, В.В. Мелешко и др. Тематика выступлений была достаточно разнообразна – вихревые структуры, идеальная нерастяжимая нить, уравнения которой похожи на уравнения Лагранжа для идеальной несжимаемой жидкости, статистическое описание турбулентности и т.д. Результаты работ публиковались в препринтах HIMSA и лишь затем в переработанных вариантах – в периодических научных изданиях. В первом выпуске Preprint HIMSA в 2001 г. была опубликована знаменитая работа В.И. Юдовича *Invincible charm and horrible difficulty of mathematical hydrodynamics*, которая в слегка измененном варианте была напечатана в 2002 г. в журнале «Успехи механики». Работы В.И. Юдовича по вибродинамике также впервые опубликованы в препринтах HIMSA, а затем в этом журнале. С сожалением следует сказать, что при переезде математического факультета University of Hull в University of York (UK) значительная часть Preprint HIMSA была утеряна и существует в настоящее время лишь у частных лиц. Это же касается и исчезнувшего в 2024 г. журнала «Успехи механики».

В апреле 2001 г. в Университете Халла прошла конференция по математической гидродинамике, на которой В.И. Юдович сделал доклад о 11 проблемах математической гидродинамики (по аналогии с 23 проблемами Гильберта и 18 проблемами Смейла). Этот доклад был повторен им 23 апреля 2001 г. в Институте Ньютона в Кембридже.

Заканчивая описание некоторых эпизодов из научной биографии В.И. Юдовича, напомним, что он никогда не прерывал крайне интенсивную научную и преподавательскую работу в родном ему РГУ, был президентом Ростовского математического общества, председателем диссертационного совета по механике жидкостей и газов, членом ряда редколлегий, в частности журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки».

В.И. Юдович создал научную школу, признанную в мире, под его руководством защищено 25 кандидатских и 6 докторских диссертаций. После 2006 г. докторские диссертации также защитили М.Ю. Жуков, Л.Г. Куракин, М.В. Норкин, В.Г. Цибулин, Л.И. Сазонов, А.Б. Моргулис.

В 2009 г. опубликованы три тома «Избранных трудов» В.И. Юдовича. В последнем помещен список его работ, насчитывающий 335 названий.

В трудах Юдовича развивалось много тем современной математики: теория косимметрии – фактически созданное им новое научное направление; теория кратных бифуркаций в системах с цилиндрическими симметриями; глобальная разрешимость и единственность решений уравнений Эйлера и Навье – Стокса; исследование бифуркаций стационарных и периодических движений вязкой жидкости; обоснование метода линеаризации в теории гидродинамической устойчивости; задача о размывании слабых разрывов в нестационарных течениях вязкой жидкости; спектральная теория линейных операторов; приложение линейных операторов к изучению устойчивости движений вязкой жидкости; исследования задачи о возникновении вибрационной конвекции и др.

М.Ю. Жуков

**Указатель материалов, опубликованных в журнале
«Известия высших учебных заведений.
Северо-Кавказский регион. Естественные науки» в 2024 г.**

К 110-ЛЕТИЮ ЮФУ

Ерусалимский Я.М., Шкурай И.А. К истории математического моделирования в Южном федеральном университете 1

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Ашихмин С.С.</i> Об операторах типа свертки с ядрами из модифицированных пространств Морри	2
<i>Бабаев А.Б.</i> Об эквивалентных нормах анизотропных пространств Гельдера – Зигмунда переменной гладкости	4-1
<i>Белявский Г.И., Мишин Н.А., Ажогин К.Э.</i> Алгоритм аппроксимации сигналов для классификации электроэнцефалограмм человека.....	2
<i>Ватульян А.О., Козаченко И.С.</i> О деформировании решетчатой пластинки глаза.....	2
<i>Ватульян А.О., Юров В.О.</i> Об анализе дисперсионного множества для неоднородного ортотропного упругого волновода.....	4-1
<i>Землякова И.А.</i> Формирование оптимального кредитного портфеля с использованием нечётко-множественного подхода.....	1
<i>Зубов Л.М., Гайбарян С.А.</i> Задача нелинейной теории упругости о растяжении и кручении составного цилиндра с предварительно напряжённым включением, содержащим винтовую дислокацию	2
<i>Кораблина Ю.В.</i> Непрерывность линейных операторов в проективных и индуктивных пределах последовательностей квазибанаховых пространств голоморфных функций.....	4-1
<i>Костоготов А.А.</i> Квазиоптимальный закон управления для лагранжевых систем с дефицитом управляющих воздействий.....	3
<i>Кудрявцев О.Е., Данилова Н.В.</i> Вычисление цен опционов в модели Хестона с помощью искусственных нейронных сетей.....	4-1
<i>Куракин Л.Г., Мелехов А.П., Островская И.В.</i> Диаграммы устойчивости правильной системы вихревых зарядов вне круговой области в случае произвольной циркуляции	4-1
<i>Мусатова Н.К.</i> Математическая модель в задаче идентификации формы летательного аппарата по диаграмме рассеяния звукового поля.....	3
<i>Норкин М.В.</i> Струйный эффект при возникновении присоединенной каверны от системы импульсивных давлений	3
<i>Норкин М.В.</i> Схлопывание присоединенной каверны при малых числах Фруда после отрывного удара плавающего эллиптического цилиндра.....	1
<i>Пожарский Д.А., Золотов Н.Б.</i> Контактная задача для трансверсально изотропного слоя с трением.....	3
<i>Ревина С.В., Келеметова К.А.</i> Линейный анализ неустойчивости Тьюринга в системах химической кинетики..	4-1
<i>Самсонов И.К., Сумбатян М.А.</i> Аэродинамическое качество тонкого крыла с винглетами различной высоты	4-1
<i>Сидорякина В.В.</i> Непрерывная зависимость решений линеаризованной начально-краевой задачи транспорта многокомпонентных наносов от входных данных задачи	1
<i>Сумбатян М.А., Черникова М.В.</i> Явные решения в проблеме звукоизоляции с использованием многослойных структур при нормальном прохождении волн	2
<i>Хопёрский А.Н., Конеев Р.В., Надолинский А.М.</i> О расширенном пространстве Гильберта	1
<i>Хубежты Ш.С.</i> Приближенное решение гиперсингулярного интегрального уравнения с применением рядов Чебышева на классе функций, ограниченных на одном конце и неограниченных на другом конце интервала интегрирования.....	4-1
<i>Ширяева Е.В., Шокарева А.С., Сибиль В.П.</i> Стационарное протекание несжимаемой вязкой жидкости сквозь двухмерный разветвленный канал	1
<i>Yao Keui.</i> Parameters Estimates on Samples with Contamination	1

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

<i>Аджиев А.Х., Кондратьева Н.В., Куповых Г.В., Кортиев А.Л.</i> Кадастр лавинной опасности территории ВТРК «Мамисон» (Северная Осетия – Алания).....	3
<i>Аджиев А.Х., Куповых Г.В., Юрченко Н.В., Керефова З.М.</i> Аномальный грозовой процесс на территории Ростовской области	2
<i>Алита С.Л., Анпаева Ж.Ю.</i> Об экономической целесообразности применения мобильных пунктов воздействия в Краснодарской противоградовой службе	3

Белоусова О.В., Тимошенко Д.В., Куповых Г.В. Структура электрического поля в конвективно-турбулентном приземном слое атмосферы.....	2
Бурдуковский М.Л. Содержание и запасы подвижных форм фосфора в постагрогенных почвах Приморского края.....	2
Вардамян Р.Р., Суварян С.Р., Андреасян В.Д. Устойчивый туризм как фактор разрешения экологических проблем (на примере города Еревана).....	4-2
Гаевая Э.А., Безуглова О.С. Прогноз развития процессов деградации на эрозийно опасных склонах черноземов обыкновенных Ростовской области.....	2
Гарькуша Д.Н., Федоров Ю.А., Ковалев Е.А., Талпа Б.В., Андреев Ю.А., Тамбиева Н.С., Краснова Е.А. Подземные источники балки Пещерная озера Баскунчак: гидрохимические особенности и эмиссия парниковых газов.....	1
Глинка В.В., Сапрыгин В.В., Ивлиева О.В., Беспалова Л.А. Типизация берегов Волгоградского водохранилища (левый берег) на основе данных беспилотных летательных аппаратов.....	4-2
Горбунова Т.Л., Гудкова Н.К., Рубанова Н.И. Оценка воздействия стока некоторых рек Сочинского Причерноморья на прибрежную морскую среду в зонах их плюмов.....	4-2
Горяев И.А., Уланова С.С. О формации <i>Tamariceta ramosissima</i> в экотонных системах Северо-Западного Прикаспия.....	4-2
Гузев О.А., Корвякова Н.П. О классификации и обусловленности факторов самонагрева угленосного отвала Донбасса.....	2
Даукаев Ас.А., Забураева Х.Ш., Даукаев Ар.А., Батукаев А.А. Основные маршруты экологического туризма в Чеченской Республике.....	2
Ергина Е.И., Артемова Е.А. Климатические и палеоклиматические факторы почвообразования на территории Крымского полуострова.....	3
Забураева Х.Ш. Туристско-рекреационное районирование Чеченской Республики.....	4-2
Зорина С.О., Никашин К.И. Геохимические и типологические особенности детритовых цирконов сосновской толщи палеогена (Русская плита).....	3
Каранин А.В., Беликова М.Ю., Кочеева Н.А., Какорин В.А. Склоновая и высотная приуроченность молниевых разрядов и пожаров от гроз в горной местности (на примере территории Республики Алтай).....	3
Карташев С.С., Безуглова О.С. Влияние гумата калия и гуминового препарата «Вю-Дон» на азотный режим чернозема обыкновенного под горохом.....	2
Красноярова Б.А., Назаренко А.Е., Плуталова Т.Г., Шарабарина С.Н. Особенности оценки углеродного следа в сельском хозяйстве: сравнительный анализ методических подходов.....	1
Латышева Л.А. Влияние природных и антропогенных факторов на формирование микроэлементного состава буроземов острова Рейнеке.....	1
Назаренко О.В., Гарькуша Д.Н. Изменение метеорологических условий в Республике Калмыкии за период 1970–2020 годов.....	4-2
Парада С.Г. Петрохимические особенности и формационная принадлежность магматических пород Кондаковского поднятия (Восточный Донбасс).....	4-2
Патрикеев Е.С., Полиенко Е.А., Безуглова О.С. Влияние биологических и гуминовых препаратов на динамику подвижных форм азота в черноземе обыкновенном при возделывании нута.....	3
Пономарев В.С., Ерохин Ю.В., Захаров А.В., Фаррахова Н.Н. Вещественный состав хромитов из ультрамафитов обрамления Сысертского комплекса (гора Крон, Средний Урал).....	4-2
Радионов А.А. Аналитическая модель суточной осцилляции плотности для возникновения ночных низкоуровневых струйных течений.....	4-2
Решетняк О.С., Галагур К.Г. Региональные особенности формирования ионного стока в бассейне Северной Двины.....	4-2
Склярченко Г.Ю., Шехурдин Г.Р. Особенности теплового поля города Ростова-на-Дону по данным дистанционного зондирования Земли.....	1
Смирнов И.А. Агроклиматическая оценка периода перезимовки озимой пшеницы в Центрально-Черноземном экономическом районе.....	3
Тимофеева Я.О., Взорова Д.О., Тимошинов Р.В. Различные формы Sg в агротемногумусовых подбелах юга Приморского края.....	3
Тимошенко Д.В. Моделирование суточной вариации атмосферного электрического поля в турбулентном приземном слое.....	3
Тимошенко Д.В., Куповых Г.В., Белоусова О.В. Анализ электродинамической модели приземного слоя атмосферы.....	4-2
Федоров Ю.А., Гарькуша Д.Н., Доценко И.В., Попов Ю.В., Доценко Н.В., Михайленко А.В. Метано- и сульфидогенез в озерах полуострова Абрау (Краснодарский край).....	3
Федоров Ю.А., Зимовец А.А., Доценко И.В., Гарькуша Д.Н., Михайленко А.В., Доценко Н.В. Эколого-географическая характеристика озера Пелёнкино (Ростовская область) по материалам ретроспективных и современных исследований.....	4-2

Федоров Ю.А., Трубник Р.Г., Гарькуша Д.Н., Доценко И.В. Метан и сульфитредуцирующие клостридии как показатели экологического состояния пелоидов гиперсоленых озер	1
Хардигов А.Э., Бондарева О.С. Условия образования месторождений золота золоторудно-кварцевого формационного типа на примере рудопроявления Хугланнах Верхояно-Колымской складчатой области..	4-2
Шагин С.И., Пшуков А.М., Кокоева А.А., Блиева О.З. Изучение радиоактивности вод горных рек Кабардино-Балкарской Республики с использованием детектора NaI в низкофоновой защите.....	2
Шамарина М.А. Внутригодовая динамика химического состава воды в устье реки Баксан	3
Юзбеков А.К., Куманяев А.С. Оценка влияния старовозрастных ельников на углеродный баланс таежных лесов Валдая	2
Gurbanov G.H. Conditions for the Formation of Landslides in the Territory of the Nakhchivan Autonomous Republic	4-2

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Бархалов Р.М., Рамазанова Д.М., Хлопкова М.В., Мирзаханов М.К. К изучению биологии судака (<i>Sander lucioperca</i>) в изменившихся экологических условиях северной части Аграханского залива Каспийского моря	1
Бурукина Е.А., Колесников С.И., Яковлева Л.В., Минникова Т.В. Исследование фитотоксичности почв Астраханской области, подверженных пастбищной дигрессии	1
Васильченко Н.Г., Механцева К.В., Иванов Ф.Д., Пуликова Е.П., Чистяков В.А., Усатов Ал.В., Брень А.Б., Рудой Д.В. Биотехнологически перспективные гидролитические свойства бактерий родов <i>Bacillus</i> и <i>Raenibacillus</i> , выделенных из ризосферы пшеницы озимой (<i>Triticum aestivum</i> L.). Часть 1	4-1
Дмитриева М.В., Павлов В.А., Афанасьева П.С., Золотухина Е.В. Разработка технологии получения нового биоэлектродкатализатора – «грубого» экстракта <i>Saccharomyces cerevisiae</i>	1
Дудагова Э.Ш., Тайсумов М.А., Астамирова М.А.-М., Байбатырова Э.Р. Распределение видов растений по флористическим районам бассейна реки Аргун.....	3
Евстегнеева Н.А., Колесников С.И., Тимошенко А.Н., Русева А.С., Минникова Т.В. Диагностика экотоксичности лития в почвах разной буферности по активности инвертазы.....	4-1
Жарикова Е.А., Голодная О.М. Оценка запасов углерода в почвах лесов юга Приморья	4-1
Иванов А.Л., Узденов У.Б., Борлакова Ф.М. Неогеновые реликты флоры Карачаево-Черкесии и их значение для понимания флорогенетических процессов на Северном Кавказе	4-1
Исламмагомедова Э.А., Халилова Э.А., Абакарова А.А. Влияние геотермальной воды в составе твердых сред культивирования на морфологические свойства дрожжей рода <i>Saccharomyces</i>	1
Исламмагомедова Э.А., Халилова Э.А., Абакарова А.А., Аливердиева Д.А. Толерантность дрожжей <i>S. cerevisiae</i> к повышенным концентрациям глюкозы и этанола	4-1
Кузьмина Н.М. Роль и особенности произрастания декоративных древесных растений в городских зонах рекреации	4-1
Науменко Ю.В., Назын Ч.Д., Каштак Е.С., Ооржак У.С. Гидрохимическая и альгологическая характеристика минерального источника Устуу-Сенек (Республика Тыва, Россия).....	3
Османов Р.М., Алиева З.М., Салихова М.В. Особенности естественного и клонального воспроизведения <i>Matthiola daghestanica</i> (Brassicaceae).....	3
Пуртова Л.Н., Киселева И.В., Тимофеева Я.О., Емельянов А.Н., Клочкова Н.Л. Влияние различных фитомелиорантов на плодородие и оптические показатели агрогенных почв Приморья.....	1
Тимошенко А.Н., Колесников С.И., Евстегнеева Н.А., Кабакова В.С., Минникова Т.В., Казеев К.Ш., Денисова Т.В. Изменение активности оксидоредуктаз чернозема обыкновенного при загрязнении платиной ..	2
Храпай Е.С., Кузина А.А., Колесников С.И., Минникова Т.В., Казеев К.Ш. Оценка здоровья почвы рекультивированного хвостохранилища по показателям фитотоксичности	1
Цепина Н.И., Колесников С.И., Минникова Т.В., Русева А.С., Труфанов Д.А. Оценка фитотоксичности наночастиц серебра в черноземе обыкновенном	2
Чистяков В.А., Денисенко Ю.В., Празднова Е.В., Емельянец С.А. Старение и надежность: как вариации во времени интенсивности отказов влияют на форму кривых дожития стареющих организмов	2

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Миноранский В.А., Тимофеенко Ю.В. Фестиваль природного богатства и красоты донской степи	2
---	---

ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ

Бауэр С.М., Боев Н.В., Ватульян А.О., Карякин М.И. Юрий Анатольевич Устинов (1934–2023).....	4-1
Жуков М.Ю. К 90-летию со дня рождения В.И. Юдовича. Эпизоды о научной деятельности	4-1

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Минкин В.И. Юрий Иванович Рябухин (75 лет со дня рождения)	3
---	---

ПАМЯТИ КОЛЛЕГИ

Виктор Исидорович Литвиненко (04.11.1940–25.01.2024)	1
---	---

Над номером работали: Т.А. Ватульян, Л.С. Ворович, Е.М. Колосова, О.В. Назаренко, М.С. Шипитко

Подписано в печать 20.12.2024. Выход в свет 23.12.2024. Формат 60×84 1/8. Бумага офсетная.
Шрифт Times. Усл. печ. л. 16,74. Уч.-изд. л. 17,13. Тираж 250 экз. Заказ № 9788.

Адрес редакции и издателя (для переписки): 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42, ЮФУ,
журнал «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки»,
e-mail: izvestiya@sfedu.ru, адрес в Интернете: www.izvestiya.sfedu.ru

Адрес редколлегии: 344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 2, к. 110,
тел.: +7 (863) 218-40-00 доб. 11-093; доб. 11-094.

Отпечатано в отделе полиграфической, корпоративной и сувенирной продукции
Издательско-полиграфического комплекса КИБИ МЕДИА ЦЕНТРА ЮФУ,
344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, 200/1, корп. 1, к 104, тел. +7 (863) 243-41-66

Magazine released: T.A. Vatulyan, L.S. Vorovich, E.M. Kolosova, O.V. Nazarenko, M.S. Shipitko

Signed print December 20, 2024. The publication December 23, 2024. Format 60×84 1/8. Offset paper. Font Times.
Conv. print. sheets 16.74. Publ. sign. 17.13. Edition 250 copies. Order number 9788.

Address of Editorial Board: 344006, Rostov-on-Don, Bolshaya Sadovaya St., 105/42,
SFU, journal “Bulletin of Higher Educational Institutions. North Caucasus Region. Natural Science”,
e-mail: izvestiya@sfedu.ru, Web Address: www.izvestiya.sfedu.ru

Address of Editorial Board: 344090, Rostov-on-Don, Stachki Ave, 200/1, build. 2, room 110,
phone +7 (863) 218-40-00 ext. 11-093; ext. 11-094.

Printed in the printing department, and corporate souvenirs,
Publishing and printing complex KIBI MEDIA CENTER, SFU,
344090, Rostov-on-Don, Stachki Ave, 200/1, build. 1, room 104, phone (863) 243-41-66

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ
«ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ.
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ»**

Рецензируемый журнал «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» продолжает приём работ. Он имеет статус центрального издания и включён в перечень ВАК по следующим отраслям:

- физико-математические науки (математика, механика);
- науки о Земле.

Принимаются работы и по другим отраслям науки. Также печатаются материалы в разделах «Заметки о книгах», «Научная жизнь», «Штрихи к портрету».

Журнал издается с периодичностью 4 номера в год. С электронной версией можно ознакомиться на сайте Научной электронной библиотеки http://elibrary.ru/title_about.asp?id=7362. Опубликованные статьи индексируются в российских и международных электронных библиотеках и наукометрических базах данных: РИНЦ (RSCI), РУКОНТ, «Киберленинка», ЭБС «Университетская библиотека онлайн», ИВИС, Ulrich, EBSCO, Chemical Abstracts. Журнал включен в Russian Science Citation Index на платформе Web of Science.

Авторы, сохраняя за собой авторские права на работу и передавая журналу «Известия вузов. Северо-Кавказский регион» право первой публикации, автоматически принимают на себя обязательство не печатать её ни полностью, ни частично в каком-либо издании без указания ссылки на оригинальную публикацию в этом журнале.

Издательские услуги оплачиваются организацией или автором после утверждения статьи на редколлегии.

Оформление работ осуществляется согласно правилам:

1. Представляется статья в электронном виде. Перед заголовком указать индекс УДК.
2. Статья оформляется в формате .doc или .docx (MS Word) через 1,5 интервала, шрифтом Times New Roman размером 14 пт, страницы пронумерованы.
3. Сведения об авторах с указанием автора, ответственного за переписку, на русском и английском языках. Экспертное заключение.
4. Полное название организации на русском и английском языках.
5. Название статьи и фамилии авторов на русском и английском языках.
6. Аннотация на русском и английском языках (1000–1500 знаков / 150–200 слов).
7. Ключевые слова на русском и английском языках (8–10 слов).

Журнал распространяется по подписке через объединённый каталог «Пресса России», интернет-каталог «Пресса по подписке». Подписной индекс – 70415 (подписка на полугодие).

Адрес для переписки: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42, ЮФУ, редакция журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки».

Тел./факс главной редакции (863) 218-40-00, добавочный 11-093, 11-094.

Е-mail: izvestiya@sfedu.ru

Адрес в Интернете: www.izvestiya.sfedu.ru

ISSN 1026-2237. Doi 10.18522/1026-2237-2024-4-1. Известия высших учебных заведений.
Северо-Кавказский регион. Естественные науки.

2024. № 4-1